תרגול 10

15 בדצמבר 2013

תרגיל: יהיו $a_1,\dots a_n \in \mathbb{R}$ הוכח: $(a_1+\dots+a_n)^2 \le n(a_1^2+\dots+a_n^2)$.
פתרון: נסתכל ב $V=\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. נגדיר $x=(a_1,\dots a_n)$, $y=(1,\dots,1)$ אזי לפי אי שיוון קושי שוורץ מתקיים: $|<x,y>|^2 \le ||x||^2\cdot||y||^2$ כלומר $|(a_1+\dots+a_n)^2| \le n(a_1^2+\dots+a_n^2)$. ■

וקטורים ניצבים ומרחב ניצב

הגדרות: יהי Vממ"פ (עם נורמה מושרת). $v,u\in V$ $S\subset V$ תת קבוצה.

1. הזווית בין v ל u מוגדרת להיות $\cos(\theta):=\frac{<u,v>}{||u||\cdot||v||}$.
2. v,u יקראו ניצבים/מאונכים/אורתוגונאליים אם $<v,u>=0$ (מסומן $v\perp u$). {למשל הקבוצה $(0,4,0),(0,0,-11)$}
3. S תקרא אורתוגונלית אם כל שני וקטורים ב S ניצבים זה לזה.(אם S בסיס הוא יקרא בסיס אורתוגונלי)
4. התת מרחב הניצב ל Sמוגדר להיות $S^\perp:=\{v\in V\,|\,\forall u\in S:<v,u>=0\}$. (תרגיל $S^\perp$ הינו תת מרחב. תרגיל: $S^\perp=[span(S)]^\perp$) {למשל $(0,0,1)^\perp$ זה מישור xy}
5. v יקרא נורמלי אם $||v||=1$ (הגודל שלו 1). {למשל $(0,0,1)$}
6. עבור $v\neq 0$ התהליך/מעבר $v\to\frac{v}{||v||}$ נקרא נירמול (תרגיל: הגודל של $\frac{v}{||v||}$ הוא 1) .
7. S תקרא אורתונורמלית אם S אורתוגונליים וכל וקטור ב Sהוא נורמלי.(אם S בסיס הוא יקרא בסיס אורתונורמלי) {למשל הקבוצה $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$}

- $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ מאונך ל $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

  כי $<\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}>=-2\cdot1+0+1\cdot2=0$

- הקבוצה $S=\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\pi\\0\end{pmatrix}\}$ אותוגונלית (בדיקה ישירה כל שניים מאונכים זה לזה). כיוון ש $\#S=3$ היא בסיס אורתוגנלי של $\mathbb{R}^3$.

- הנרמול של . $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא המעבר ל
$$\frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{||\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}||} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

- הוקטור $\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ נורמלי כי
$$||\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}|| = \sqrt{(\frac{-2}{\sqrt{5}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{5}})^2} = 1$$

- הקבוצה $\{ \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ אורתונורמלית.

- תרגיל: אם $v \in S^\perp$ אזי $v \in span(S)^\perp$ (כלומר מספיק להיות מאונך לקבוצה פורשת).

הוכחה: יהא $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i w_i$ צ"ל באיברי S אזי $\left\langle v, \sum_{k=1}^{n} \alpha_i w_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_i \left\langle v, w_i \right\rangle = 0$.

- תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ אזי $[R(A)]^\perp = N(A)$

הוכחה: $(\supseteq)$ יהא $x \in N(A)$. $\Leftarrow$ $Ax = 0$. כלומר $\begin{pmatrix} - & \vec{R_1(A)} & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{R_m(A)} & - \end{pmatrix} x = 0$ ולכן לכל i $< R_i(A), x >= R(A) \cdot x = 0 \Leftarrow x \in [R(A)]^\perp$.

$(\subseteq)$ יהא $x \in [R(A)]^\perp$. אזי לכל i $< R_i(A), x >= R_i(A) \cdot x = 0 \Leftarrow Ax = 0$. $\Leftarrow$ $x \in N(A)$.

- תרגיל: יהיו $\mathbb{R}^3 \ni u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $S = \{u, v\}$ מצא בסיס ל $S^\perp$

פתרון: נגדיר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow S^\perp = N(A)$ (לפי תרגיל קודם) . נדרג
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. נציב $y = t$ ונקבל $N(A) = \{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \}$ ובסיס הוא $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

הערה: הוכחתם כי $B_R \cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ ולכן היה צפוי שמספר האיברים בבסיס של $N(A)$ הוא 1

הטלות

הטלה על וקטור:

יהא V ממ"פ, $v,u\in V$ ההטלה של v על u היא נקודה ב $span(\{u\})$ $\alpha u\in$ כך ש $0=<v-\alpha u,u>$ כלומר $(v-\alpha u)\in(\{u\})^{\perp}=(span(\{u\})^{\perp}$. נחשב את α:
$\alpha=\frac{<v,u>}{||u||^2}\Leftarrow 0=<v-\alpha u,u>=<v,u>-\alpha<u,u>$

דוגמא: מה ההטלה של $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ על $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$?

פתרון $\alpha=\frac{<\begin{pmatrix}2&0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}>}{||\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}||^2}=\frac{6}{3}=2$

ולכן ההטלה היא $2(1,1,1)=(2,2,2)$.

הטלה על תת מרחב:

יהא Vממ"פ, $W\subset V$ תת מרחב ו $B=\{v_1,\dots,v_m\}$ בסיס אורתוגונלי ל W.

אזי $<\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i,\sum_{j=1}^m\beta_jv_j>=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\alpha_i\bar{\beta_j}<v_i,v_j>=\sum_{k=1}^m\alpha_k\bar{\beta_k}||v_k||^2$

בפרט אם B בסיס אורתונומאלי $<\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i,\sum_{j=1}^m\beta_jv_j>=\sum_{k=1}^m\alpha_k\bar{\beta_k}$

הטלה על תת מרחב:

יהא V ממ"פ, $W\subset V$ תת מרחב $v\in V$ ההטלה של v על W היא נקודה ב $u\in W$ כך ש $(v-u)\in W^{\perp}$

כלומר $0=<v-u,w>: \ \forall w\in W$. איך נחשב את u?

פתרון: נניח כי $B=\{v_1,\dots,v_m\}$ בסיס אורתוגונלי של W. אזי $u=\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\in W$

ולכל $1\le j\le m$ מתקיים

$$\begin{aligned}0&=<v-u,v_j>=<v-\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i,v_j>\\&=<v,v_j>-\sum_{i=1}^m\alpha_i<v_i,v_j>=<v,v_j>-\alpha_j<v_j,v_j>\end{aligned}$$

ולכן

$\alpha_j=\frac{<v,v_j>}{||v_j||^2}$ כלומר $u=\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i=\sum_{i=1}^m\frac{<v,v_i>}{||v_i||^2}v_i$ במילים אחרות: u הוא סכום ההטלות v על כל איבר בסיס v_j בנפרד.

דוגמא:

מה ההטלה של $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ על $W=span\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\}$?

פתרון: $B=\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\}$ בסיס אורתוגונלי ל W. נבדוק הטלות של $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ על איברי הבסיס:

ההטלה על $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{<\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}>}{||\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}||^2}$

ההטלה על $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ היא $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 ולכן ההטלה על התת מרחב היא

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

טענה: יהא V ממ"פ, W ת"מ, $v \in V$ ו u ההטלה על W אזי

1. לכל $w \in W$ מתקיים: $||v-u+u-w||^2 = ||v-u||^2 + ||u-w||^2$
2. $||v-u|| = \min\{||v-w|| \mid w \in W\}$ (כלומר ההיטל הוא הנקודה הכי קרוב ב W ל v או הסטיה המינמאלית של v מ W מתקבלת ב u.)

הוכחה:

1. $u \in W$ היטל ($v-u \in W^{\perp}$) אזי לכל $w \in W$ מתקיים $(u-w) \in W$ ולכן $< v-u, u-w >= 0$ ולכן

$$\begin{aligned} ||v-u+u-w||^2 &= < (v-u)+(u-w), (v-u)+(u-w) >= \\ &= < v-u, v-u > + < u-w, u-w >= ||v-u||^2 + ||u-w||^2 \end{aligned}$$

2. ש"ל ש $||v-u||^2$ מינמאלי. לפי סעיף קודם לכל $w \in W$ מתקיים

$$||v-u||^2 \geq ||v-u||^2 + ||u-w||^2 = ||v-u+u-w||^2 = ||v-w||^2 \ \blacksquare$$

הערות:

1. תהליך גרם שמידט מבטיח לנו כי קיים בסיס אורתוגונלי ל W.
2. דוגמא פרטית של הטלה v על תת מרחב W היא הטלת v וקטור u אם נגדיר $W = span(\{u\})$

תהליך גרם שמידט

יהא V ממ"פ ו־ $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה בת"ל. תהליך גרם שמידט מעביר את B אל קבוצה $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ אורתונורמלית.

האלגוריתם:

$$w_1 := v_1$$

$$w_2 := v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2} w_1$$

$$w_3 := v_3 - \frac{<v_3,w_1>}{||w_1||^2} w_1 - \frac{<v_3,w_2>}{||w_2||^2} w_2$$

$$\vdots$$

$$w_i := v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{<v_i,w_k>}{||w_k||^2} w_k$$

כעת $B^{'} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ היא קבוצה אורתוגנאלית וע"י נירמול כל וקטור נקבל את המבוקש.
הערות:

1. בפרט לכל $W \subset V$ תת מרחב קיים בסיס אורתונורמלי (בפרט אורתוגונלי)
2. לכל $1 \leq l \leq n$ מתקיים $span(\{v_1, \ldots, v_l\}) = span(\{w_1, \ldots, w_l\})$ ולכן $span(B) = span(\{w_1, \ldots, w_l, v_{l+1}, \ldots v_n\})$ כלומר ניתן להפעיל את תהליך גרם שמידט רק על הרישא של הקבוצה בלי לאבד מידע.

דוגמא:
הפוך את הקבוצה $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ לקבוצה אורתונורמלית.
פתרון: נבחר $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{<v_2, w_1>}{||w_1||^2} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{||w_1||^2} w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{||w_2||^2} w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{6}{4})} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת $\{w_1, w_2, w_3\}$אורתוגונאלית (בדקו!). ננרמל את הוקטורים
$||w_1|| = \sqrt{2}$ $||w_2|| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $||w_3|| = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
כעת $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ קבוצה אורתונורמלית.
הערה: אם היינו מחליפים את סדר האברים בבסיס ומתחילים עם $w_1 = v_2$ היינו מקבלים קבוצה אורתונורמלית אחרת.

מטריצות אורתוגונליות ויונטריות

הגדרה: מטריצה $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ תקרא אורתוגנלית אם עמודות המטריצה הם קבוצה אורתונורמלית.
בפרט מתקיים $QQ^t = Q^tQ = I$ ובפרט $Q^{-1} = Q^t$
הגדרה: מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ תקרא יונטרית אם עמודות המטריצה הם קבוצה אורתונורמלית.
בפרט מתקיים $AA^* = A^*A = I$ ובפרט $A^{-1} = A^*$ כאשר $A^* = \bar{A}^t$ (שיחלוף+הצמדה כל רכיב).

תרגיל: תהא Qאורתוגונלית. הוכח שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $||Qx|| = ||x||$ (כלומר Q שומרת גדלים)

פתרון: מ"ל $||Qx||^2 = ||x||^2$.

$$||Qx||^2 =< Qx, Qx >= (Qx)^t Qx = x^t Q^t Qx = x^t x =< x, x >= ||x||^2 \blacksquare$$