

דף תרגילים 13

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 נסתכל על משטח הסיבוב של העקומה $\alpha(\phi) = (\cosh \phi, 0, \phi)$ עבור $\phi \in \mathbb{R}$.

א. חשבו את עקמומיות גאוס בכל נקודה (כדאי להעזר באופרטור לפלס בלטרמי).

ב. חשבו את עקמומיות גאוס הכוללת של המשטח.

פתרון 1

א. עבור משטח סיבוב

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2 \phi & 0 \\ 0 & 1 + \sinh^2 \phi \end{pmatrix} = \cosh^2 \phi \delta_{ij}$$

נשתמש באופרטור לפלס-בלטרמי. הגורם הקונפורמי הוא

$$\lambda(\theta, \phi) = f^2(\theta, \phi) = \cosh^2 \phi$$

כלומר

$$f(\theta, \phi) = \cosh \phi$$

ר

$$\begin{aligned} K &= -\Delta_{LB} (\ln(f)) \\ &= -\Delta_{LB} (\ln(\cosh \phi)) \\ &= -(\cosh^{-2} \phi) \Delta_0(\ln(\cosh \phi)) \\ &= -\cosh^{-2} \phi (\ln(\cosh \phi))'' \\ &= -\cosh^{-2} \phi (\tanh \phi)' \\ &= -\cosh^{-2} \phi (1 - \tanh^2 \phi) \\ &= \frac{\tanh^2 \phi - 1}{\cosh^2 \phi} \\ &= \frac{-1}{\cosh^4 \phi} \end{aligned}$$

ג. נחשב את אלמנט השטח.

$$dA_M = \sqrt{|g_{ij}|} = \cosh^2 \phi$$

לכן עקמוניות גאוס כוללת

$$\begin{aligned} \int_M K_p dA_M &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\cosh^4 \phi} \cosh^2 \phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\cosh^2 \phi} d\phi d\theta \\ &= -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 \phi} d\phi \\ &= -2\pi (\tanh \phi|_{-\infty}^{\infty}) \\ &= -2\pi(1 - (-1)) \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

ובאותו אופן

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1$$

תרגיל 2 חשבו את עקמוניות גאוס הכוללת של משטח הסיבוב של העקומה $\alpha(\phi) = (\phi, 0, \phi^2)$ עבור $\phi \in [0, \infty]$.

פתרון 2 עבור משטח סיבוב

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 1 + 4\phi^2 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 2\phi & 0 \\ 0 & 8\phi \end{pmatrix}$$

ז"א

$$g_{11;2} = 2\phi, \quad g_{22;2} = 8\phi$$

והשאר 0.

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}(g_{12;1} - g_{11;2} + g_{12;1})g^{22} = \frac{-\phi}{1 + 4\phi^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}(g_{11;2} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{1}{\phi} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0 \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = \frac{4\phi}{1 + 4\phi^2}\end{aligned}$$

לפי *Theorema Egregium*, עקמומיות גאוס היא

$$\begin{aligned}K(\theta, \phi) &= \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^j \Gamma_{2]j}^2 \right) \\ &= \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^1 \Gamma_{2]1}^2 + \Gamma_{1[1]}^2 \Gamma_{2]2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{g_{11}} \left(\Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) \\ &= \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{4\phi^2 - 1}{(1 + 4\phi^2)^2} - 0 + 0 + \frac{1}{1 + 4\phi^2} - \frac{4\phi^2}{(1 + 4\phi^2)^2} - 0 \right) \\ &= \frac{4}{(1 + 4\phi^2)^2}\end{aligned}$$

כעת לחישוב עקמומיות גאוס כוללת נמצא את אלמנט השטח

$$dA_M = \sqrt{|g_{ij}|} = \phi(1 + 4\phi^2)^{\frac{1}{2}} d\theta d\phi$$

$$\begin{aligned}
 \int_M K_p dA_M &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{4}{(1+4\phi^2)^2} \phi(1+4\phi^2)^{\frac{1}{2}} d\phi d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^\infty \frac{4\phi}{(1+4\phi^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} t = 1 + 4\phi^2 \\ dt = 8\phi d\phi \end{array} \right\} \\
 &= \pi \int_1^\infty t^{-\frac{3}{2}} dt \\
 &= -2\pi t^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^\infty \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

תרגיל 3 יהי $\rho > 0$ ותהי

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)}$$

חשבו את עקמוניות גאוס של המטריקה $.g_{ij}(x, y) = f^2(x, y)\delta_{ij}$

פתרון 3 נשתמש באופרטור לפלס-בלטרמי.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{1}{1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)} \\
 \lambda(x, y) &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= -\Delta_{LB}(\ln(f)) \\
 &= \Delta_{LB}\left(\ln\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)\right) \\
 &= \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \Delta_0\left(\ln\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)\right) \\
 &= \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)\right)\right) \\
 &= \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{1}{2}\rho x}{1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{1}{2}\rho y}{1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)}\right)\right) \\
 &= \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \left(\frac{-\frac{\rho}{2}(-1 + \frac{\rho}{4}(x^2 - y^2))}{\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2} + \frac{-\frac{\rho}{2}(-1 + \frac{\rho}{4}(y^2 - x^2))}{\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \cdot \frac{\rho}{\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2} \\
 &= \rho
 \end{aligned}$$

תרגיל 4 יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח מוגדר ע"י גרף של $z = f(x, y)$ כאשר $f(x, y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$. יהי (e_1, e_2, e_3) הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 .

א. מוצאו מטריצת הסיאון H_f של f בראשית הצירים.

ב. יהיו λ_i (כאשר $i = 1, 2$) ערכים עצמיים של H_f . יהי v_i וקטור עצמי במישור (x, y) השייך לערך עצמי λ_i . נגדיר מישור $E_i \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2$) הנפרש ע"י e_3 ו- v_i . נגדיר עקומה $\gamma_i \subset \mathbb{R}^3$ ע"י $\gamma_i = M \cap E_i$.

מוצאו את העקמומיות המסומנת של כל אחת מהעקומות γ_i בראשית הצירים.

ג. חשבו את העתקת ווינגרטון של M בראשית הצירים ואת עקמומיות גאוס של M בראשית הצירים.

ד. חשבו את העקמומיות הממוצעת של M בראשית הצירים.

פתרון 4

א.

$$H_f = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

ג. נשים לב שראשית הצירים נקודה קריטית כי $f_x = f_y = 0$ שם, לכן המישור $T_p M$ מקביל למישור xy ו- $H_f = (L^i_j)$ בנקודה זו.

העקמומיות המסופנות \tilde{k}_{β_i} הן לכן $\tilde{k}_{\beta_i} = k_i = \lambda_i$.

נמצא את הערכים העצמיים: הפולינום האופייני הוא $(6-x)(-6-x) - 64 = 0$ כלומר הערכים העצמיים הם $\lambda_{1,2} = \pm 10$ ואלה הם העקמומיות המסופנות של $\beta_{1,2}$.

ג.

$$K = \tilde{k}_{\beta_1} \tilde{k}_{\beta_2} = \lambda_1 \lambda_2 = -100$$

ד. עקמומיות ממוצעת $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$.

תרגיל 5 יהי $C > 0$ ותהי פונקציה המקיימת

$$f(x, y) \geq C(x^2 + y^2), \quad f(0, 0) = 0$$

א. למצוא חסם תחתון לכל ערך עצמי של ההסיון של f בראשית הצירים.

ב. למצוא חסם תחתון לעקמומיות גאוס של הגרף של f בראשית הצירים.

פתרון 5

א. נסתכל על גרף הפונקציה

$$g(x, y) = C(x^2 + y^2)$$

ראשית הצירים נקודה קריטית לכן

$$(L^i_j) = H_g = \begin{pmatrix} 2C & 0 \\ 0 & 2C \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2C$$

כלומר

$$\tilde{k}_{\beta_1} = \tilde{k}_{\beta_2} = 2C$$

באשר העקופות β_i מוגדרות ע"י $\beta_i = M_g \cap E_i$ כאשר M_g הגרף של g , ו- E_i המישורים $E_i = \text{Span}(v_i, n)$ כאשר v_i הו"ע של העתקת ווינגרטון.

נסמן $\beta_v = M_g \cap E_v$ באשר $E_v = Sp(v, n)$, אז לכל $v \in T_p M$

$$\widetilde{k}_{\beta_v} = 2C$$

כעת נחזור להסתכל על $f(x, y)$. בראשית הצירים הגרפים של f ו- g נחתכים ו- $f > g$. בפרט אם נסמן $\gamma_i = M_f \cap F_i$ באשר $F_i = Sp(w_i, n)$ באשר w_i ו"ע של העתקת ווינגרטו של M_f בראשית אז

$$\widetilde{k}_{\gamma_i} > \widetilde{k}_{\beta_{v_i}} = 2C, \quad i = 1, 2$$

כלומר לסיכום הערכים העצמיים של ההסיואן הם לפחות $2C$, כדרוש.

איהשויון בין העקמומיות המסומנות לעיל נובע כי בנקודה קריטית c מתקיים

$$\widetilde{k}_f(c) = f''(c)$$

לכן רק נשאר להראות $f''(0) > 2C$. זה נכון כי

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{h}{2}) - f'(-\frac{h}{2})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + f(-h)}{h^2} \\ &> \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Ch^2 + C(-h)^2}{h^2} \\ &= 2C \end{aligned}$$

ב. עקמומיות גאוס לפחות $2C \cdot 2C = 4C^2$.

תרגיל 6

א. תהי $C \subset \mathbb{R}^2$ עקומת ז'ורדן רגולרית. להראות שבנקודה של C הקרובה ביותר לראשית הצירים הרדיוס-ינסטור הוא מאונך לוקטור המשיק.

ב. יהי M משטח סגור ב- \mathbb{R}^3 . נניח שנקודה P על M הרחוקה ביותר מראשית הצירים. מיצאו סימן של עקמומיות גאוס של M בנקודה P .

פתרון 6

א. בנקודה הקרובה לראשית $|\alpha(t)|$ מיינמלי כלומר $|\alpha(t)|^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$ מיינמלי. כלומר

$$\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle' = 0$$

ולפי כלל לייבניץ

$$2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

כלומר

$$\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

כדורש.

ב. $|x(u^1, u^2)|$ מיינמלי אפי"פ $|x(u^1, u^2)|^2$ מיינמלי, וזה קורה אפי"פ $\langle x, x \rangle' = 0$ כלומר לפי לייבניץ $\langle x, x_i \rangle = 0$ לכל $i = 1, 2$ כלומר $x(u^1, u^2)$ מאונק ל- $T_p M$ כלומר

$$n(u^1, u^2) = \alpha x(u^1, u^2)$$

עבור $\alpha \in \mathbb{R} \neq 0$. לכן שם

$$L_{ij} = -\langle x_i, n_j \rangle = -\langle x_i, (\alpha x)_j \rangle = -\alpha g_{ij}$$

לכן

$$L^i_j = -g^{ik} L_{kj} = \alpha g^{ik} g_{kj} = \alpha \delta^i_j$$

בפרט

$$K = \alpha^2 > 0$$