תרגיל בית 5 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. עבור האידאלים הבאים קבעו האם הם ראשוניים והאם הם מקסימליים.

א. $I = \langle 4x+1 \rangle \lhd \mathbb{Z}[x]$.

ב. $I = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{Q} \} \lhd \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a,b \in \mathbb{Q} \} = R$. רמז: הראו $R \cong \mathbb{Q}[x]/\left\langle x^2 \right\rangle$.

ג. $I = \left\langle \overline{x+1} \right\rangle \lhd \mathbb{F}_3[x]/\left\langle x^4-16 \right\rangle$ כאשר בסימון $\overline{x+1}$ הכוונה לתמונה של $x+1$ בהטלה לחוג המנה. רמז: אפשר להשתמש במשפט השאריות הסיני.

שאלה 2. מצאו $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\mathbb{Z}[i] / \langle 3+i \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. הוכיחו את האיזומורפיזם, וקבעו האם האידאל $\langle 3+i \rangle$ הוא אידאל ראשוני, מקסימלי או אף אחד מהם ב-$\mathbb{Z}[i]$.

שאלה 3. חוג R נקרא **ראשוני למחצה** אם אין לו אידאלים $0 \neq I \lhd R$ כך ש-$I^2 = 0$. אידאל P בחוג כלשהו R נקרא ראשוני למחצה אם R/P הוא חוג ראשוני למחצה.

א. הוכח כי כל אידאל ראשוני הוא אידאל ראשוני למחצה.

ב. הוכח כי P ראשוני למחצה אם ורק אם (לכל אידאל $I \lhd R$, אם $I^2 \subseteq P$, אז $I \subseteq P$).

ג. אידאל $I \lhd R$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$I^k = 0$. הוכיחו כי חוג הוא ראשוני למחצה אם ורק אם אין בו אידאלים נילפוטנטיים שונים מ-0.

ד. מצאו את כל האידאלים הראשוניים למחצה של $\mathbb{Z}$.

שאלה 4. יהי R חוג. ניזכר בהערכה $v : R((x)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ שהגדרנו בתרגול:

$$v(0) = \infty, \qquad v\left(\sum_{i=-n}^{\infty} a_i x^i\right) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$$

הוכיחו כי מתקיים $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ וגם $v(f \cdot g) \geq v(f) + v(g)$. בנוסף, אם R הוא תחום, אז יש שיוויון $v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$.

שאלה 5. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שכל אידאל ראשוני $P \lhd R$ הוא מן הצורה $R \cap Q$ עבור אידאל ראשוני $Q \lhd R[[x]]$. (רמז: $R[[x]]/\langle x \rangle \cong R$).

שאלה 6. יהי R חוג. איבר $e \in R$ יקרא אידמפוטנט אם $e^2 = e$. אידמפוטנט $e \in R$ הוא לא טריוויאלי אם $e \neq 0_R, 1_R$. בתרגיל הזה נמצא דרך לזהות שחוג R הוא מכפלה ישרה של חוגים.

א. יהיו S, S' חוגים. הוכיחו שאם $R \cong S \times S'$, אז קיים ב-R אידמפוטנט מרכזי לא טריוויאלי.

ב. אידמפוטנטים $e, f \in R$ נקראים אידמפוטנטים אורתוגונליים אם $ef = fe = 0$. הוכיחו שאם $e \in R$ אידמפוטנט, אז גם $1-e$ אידמפוטנט. הוכיחו כי e ו-$1-e$ הם אורתוגונליים.

ג. הוכיחו שאם $e \in R$ הוא אידמפוטנט מרכזי לא טריוויאלי, אז קיים איזומורפיזם של חוגים $\varphi\colon R \to Re \times R(1-e)$. רמז: זה סעיף קצת ארוך, אבל בעיקר טכני. כתבו במפורש לכל $x \in R$ מהו $\varphi(x)$ ובדקו שאכן מדובר באיזומורפיזם של חוגים.

נשתמש בסימון $I \leq_l R$ כדי לומר ש-I הוא אידאל שמאלי של R. כלומר $RI \subseteq I$.

שאלה 7. יהי R חוג בלי יחידה, ויהי $I \leq_l R$ אידאל שמאלי. נסמן $I^+ = \{x \in R \,|\, xR \subseteq I\}$.

א. הוכיחו $I^+ \lhd R$ אידאל דו־צדדי.

ב. הוכיחו שאם $I \lhd R$, אז $I \subseteq I^+$.

ג. הוכיחו שאם R חוג (עם יחידה), אז $I^{++} = I^+$.

בהצלחה!