אפרוקסימציה(קירוב) של פונקציות

להבדיל מאינטרפולציה, שבה מקבלים סט של נקודות ומוצאים פונקציה, כאן נתונה פונקציה וצריך לקרב אותה.

אפרוקסימציה לא בהכרח עוברת דרך סט של נקודות.

פיתוח באמצעות טור טיילור

משפט

תהי $f\left(X\right)$ פונקציה בעלת $n+1$ נגזרות רציפות באינטרבל נתון עבור $n\geq 0$ מסויים. אזי עבור $x,x_0\in\left[a,b\right]$ מתקיים

$$f\left(x\right)=P_n\left(x\right)+R_{n+1}\left(x\right)$$

כאשר

$$P_n\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{\left(x-x_0\right)}{1!}f\left(x_0\right)+\ldots+\frac{\left(x-x_0\right)^n}{n!}f^{(x)}\left(x_0\right)$$

$$R_{n+1}\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\left(x-t\right)^nf^{(n+1)}\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\frac{\left(x-x_0\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}f^{(n+1)}\left(\xi\right)$$

עבור ξ מסויים בין x_0 לx(ξ תלוי בx)

קירוב לפי קריטריון הminimax

שגיאת הminimax

נתונה הפונקציה f, ורוצים לקרב אותה באמצעות פולינום q כך ש$\deg q\leq n$.

נגדיר:

$$\rho_n\left(f\right)\triangleq\inf_{\deg q\leq n}\left\|f-q\right\|_\infty$$

כאשר

$$\left\|f\right\|_\infty\triangleq\max_{a\leq x\leq b}\left|f\left(x\right)\right|$$

כלומר מכל הפולינומים ממעלה עד n, בוחרים את זה ההפרש המקסימלי שלו מf הוא מינימלי.

נסמן ב$q_n^*\left(x\right)$ את הפולונום האופטימלי, והוא מקיים

$$\rho_n\left(f\right)=\|f-q_n^*\|_\infty$$

אבחנות במקרה של $f=e^x$, $n=1$ ו$a=-1,b=1$

1. $q_1^*\left(x\right)$ ו$f\left(x\right)$ חייבות להחתך בשתי נקודות באינטרבל: $-1<x_1<x_2<1$. אחרת אפשר לשפר את האפרוקסימציה באמצעות הזזה.
2. השגיאה המקסימלית מתקבלת ב3 נקודות בדיוק(בקצוות ובאמצע), שכן במקרה הזה חייב להיות איזון בשגיאה בין הקצוות.

הערה

קירוב minimax נותר תוצאה הרבה יותר טובה מאשר קירוב לפי טור טיילור.

אלגוריתם כללי Remes

אפשר למצוא באטקינסון, סעיפים 4.7,4.9

אפרוקסימציה ע"פ קריטריון הleast squres

קשה לחשב את q_n^*. יותר נוח לבצע מינימיזציה על סכום ריבועי הסטיות: אם r_i הם השגיאות בכל נקודה, רוצים

$$\sum r_i^2\to\min$$

נגדיר

$$\|q\|_2=\left(\int_a^b\left|g\left(x\right)\right|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\qquad g\in C\left[a,b\right]$$

עבור פונקציה $f\left(x\right)$רציפה באנטרבל $\left[a,b\right]$ ו$n\geq0$, נגדיר

$$M_n=\inf_{\deg(r)\leq n}\|f-r\|_2$$

ועבור r_1^* שלגביו מתקבלת השגיאה הריבועית המינימלית

$$M_n=\|f-r_1^*\|_2$$

הערה

מכיוון שהשורש מחוץ לאינטגרל, ומחפשים את המינימום, אפשר לוותר על השורש בחישוב, ולמצוא מינימום ל$\|f-r_1\|_2^2$.

פתרון לפונקציה כללית לפי עקרון Least Squares

נרצה למצוא פולינום אפרוקסימיזציה

$$r_n^*\left(x\right)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

לפונקציה $f\left(x\right)$. כך שעבור אינטרבל נתון $[a,b]$ יתקיים

$$F\left(a_0,a_1,\ldots a_n\right)\equiv\int_a^b\left[f\left(x\right)-\sum_{j=0}^{n}a_jx^j\right]^2\,\mathrm{d}x$$

יהיה מינימלי.

נדרוש אפוא ש

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}=0\qquad i=0,1,\ldots n$$

ביצוע הגזירה(בתוך האינטגרל) לפי כל אחד מהמשתנים $a_0,\ldots a_n$:

$$i=0,1,\ldots n\qquad\int_a^b\frac{\partial}{\partial a_i}\left[f\left(x\right)-\sum_{j=0}^{n}a_jx^j\right]^2\,\mathrm{d}x=$$

$$2\int_a^b\left[f\left(x\right)-\sum_{j=0}^{n}a_jx^j\right]\left(x^i\right)\,\mathrm{d}x=0$$

$$\int_a^b f\left(x\right)x^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{j=0}^{n}a_jb^j\right)x^2\,\mathrm{d}x$$

בשילוב התנאים הנ"ל זה נותן

$$\sum_{j=0}^{n}a_j\int_a^b x^{i+j}\,\mathrm{d}x=\int_a^b f\left(x\right)x^i\,\mathrm{d}x\qquad i=0,1,\ldots n$$

זו מערכת משוואות לינאריות ב$(n+1)$ נעלמים