

**ועדת המשמעת מזהירה!**  
 נבחן שימצאו ברשותו חומרי  
 עזר אסורים או יתפס בהעתקה  
 יענש בחומרה עד כדי הרחקתו  
 מהאוניברסיטה.

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן  
 מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)  
 מס': 8821105  
 מרצה: פרופ' מיכאל מגרל  
 תאריך: 10.9.07 מועד א'  
 חומר עזר: רק מחשבון  
 משך המבחן: שעתיים ותצי

השאלות:

5 מתוך 6

1. א. הסבר מדוע  $(Map(N, N), \circ)$  מונויד. מצא בו אלמנט הפיך משמאל שלא הפיך מימין.  
 ב. תן דוגמה של אגודה סופית שהיא לא חבורה.  
 ג. הוכח שאם  $(X, \cdot)$  אגודה סופית עם אפשרות לצמצום (מימין ומשמאל) אז היא חבורה.  
 ד. תן דוגמה של 2 אגודות לא איזומורפיות עם 3 איברים.

2. (חבורת Heisenberg)  
 מעל קבוצה  $H := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  נגדיר פעולה  
 $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1 + x_3 y_2, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$   
 א. הוכח ש  $(H, \cdot)$  חבורה לא קומוטטיבית.  
 ב. הוכח שהיא איזומורפית לחבורת מטריצות הבאה (לגבי הכפל):

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- ג. מצא תת חבורה לא נורמלית.  
 ד. מצא לפחות 3 תת חבורות נורמליות.

3. א. הוכח או הפרך:  $70!+1$  מתחלק ב 71.  $116!+1$  מתחלק ב 117.  
 ב. בעזרת משפט Euler חשב 2 ספרות אחרונות של  $2007^{2007}$ .  
 ג. הוכח או הפרך:  $U_8 \cong U_{10}$ .

- ד. כמה אוטומורפיזמים יש לחבורה  $\langle \text{cis} \frac{\pi}{\sqrt{5}} \rangle$  ?

4. עבור  $H \leq G$  נגדיר:  $N(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$

("נורמליזטור" של  $H$  ב-  $G$ ).

הוכח:

א.  $N(H) = G \Leftrightarrow H \triangleleft G$  ו-  $N(H) \leq G$ .

ב.  $H \triangleleft N(H)$  ואם  $H \triangleleft K \leq G$  אזי  $K \leq N(H)$ .

ג.  $|\{gHg^{-1} : g \in G\}| = [G : N(H)]$ .

ד. אם  $K \leq H \triangleleft G$  ו-  $H$  ציקלית סופית אז  $K \triangleleft G$ .

4. א. הוכח משפט Caeley. האם כל תת חבורה סופית איזומורפית עם תת חבורה

של חבורת מטריצות  $GL_n(R)$ ?

ב. הוכח או הפוך:  $C^*/T \cong R$ ,  $R/9Z \cong T$  (כאשר  $T := \{z \in C \mid \|z\|=1\}$ ).

ג. מצא תמונות אפימורפיות (עד כדי איזומורפיזם) של חבורת Euler  $U_{10}$

ושל  $Z_{21}$ .

ד. מצא לפחות 4 חבורות שונות (עד כדי איזו') עם 8 אלמנטים.

6. א. הוכח משפט Sylow 1.

ב. הוכח שהצמדה  $g \circ A \mapsto gAg^{-1}$  מגדירה פעולה של  $G$

מעל קבוצה של תת חבורות  $Sub(G)$ .

ג. מהיא קבוצת  $F$  של נקודות שבת?

ד. בעזרת משפט Burnside מצא מספר ריבועים שונים (עד כדי  $D_4$ ) אשר

מתקבלים מריבוע נתון אם מותר לצבוע קודקודים ב 3 צבעים קבועים.

בהצלחה ושנה טובה !