בס"ד

**מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ב סמסטר קיץ מועד א**

מרצים: ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: אין.

**הוראות הפעלה:**

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

| שאלה | ציון |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

ציון:

**בהצלחה**

**ענה בפירוט בדף זה**

## שאלה 1

א. תהי $D$ קבוצה של מספרים ממשיים ויהי $a\in\mathbb{R}$. נסמן $a+D=\{a+b|b\in D\}$,
$D-D=\{b-c|b\in D\wedge c\in D\}$.

1. (5) הוכח שאם $D$ בת מנייה, אז גם $D-D$ בת מניה.
2. (5) הוכח שאם $D$ בת מנייה, אז יש מספר ממשי $a$ כך ש $(a+D)\cap D=\phi$.

ב. תהי $f:A\to B$ פונקציה, ויהיו $D\subseteq B, C\subseteq A$. הוכח את הטענות הבאות:

1. (5) אם $f$ חח"ע אז $C=f^{-1}\left[f[C]\right]$.
2. (5) אם $f$ על אז $f\left[f^{-1}[D]\right]=D$.

הערה: אין קשר בין סעיפים א ו- ב.

**פתרון**

א.

1. נגדיר $f:D\times D\to D-D$ ע"י $\forall(b,c)\in D\times D,\ f(b,c)=b-c$. $f$ על ולכן $|D-D|\le|D\times D|=|D|\cdot|D|\le\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.
2. נניח בשלילה שלכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $(a+D)\cap D\neq\phi$. לכן לכל $a\in\mathbb{R}$ קיימים $b,c\in D$ כך ש- $a+b=c\in D$, כלומר $a=b-c\in D-D$. קיבלנו ש- $\mathbb{R}\subseteq D-D$, כלומר $\mathbb{R}$ מוכלת בקבוצה בת מניה בסתירה לכך ש- $|\mathbb{R}|>\aleph_0$.

ב.

1. נוכיח תחילה ש $C\subseteq f^{-1}\left[f[C]\right]$ יהי $x\in C$ ואז $y=f(x)\in f[C]$. מכיוון ש $y\in f[C]$ אז $x\in f^{-1}\left[f[C]\right]$.

נוכיח ש $f^{-1}\left[f[C]\right]\subseteq C$ יהי $x\in f^{-1}\left[f[C]\right]$ ז"א קיים $y\in f[C]$ כך ש $f(x)=y$ ומכיוון ש $y\in f[C]$ אז קיים $z\in C$ כך ש $f(z)=y$ ומכיוון ש $f$ חח"ע $x=z$ ז"א $z\in C$.

2.

נוכיח תחילה ש $D\subseteq f\left[f^{-1}[D]\right]$ יהי $y\in D$ ומכיוון ש $f$ על קיים $x\in A$ כך ש $y=f(x)$ ז"א $x\in f^{-1}[D]$ ואז $y=f(x)\in f\left[f^{-1}[D]\right]$.

נוכיח ש $f\left[f^{-1}[D]\right]\subseteq D$ יהי $y\in f\left[f^{-1}[D]\right]$ ז"א קיים $x\in f^{-1}[D]$ כך ש $y=f(x)$. $x\in f^{-1}[D]$ ולכן קיים $z\in D$ כך ש $y=f(x)$ מכיוון ש $f$ פונקציה $y=z$.

**ענה בפירוט בדף זה**

## שאלה 2

א. (10) הוכח את משפט קנטור. לכל קבוצה $A$ מתקיים $|A|<|P(A)|$.

ב. חשב את עוצמת הקבוצות הבאות:

1. (3) $A=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x\notin\mathbb{Q}, f(x)=1\}$.

2. (3) $B=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x\in\mathbb{Q}, f(x)=1\}$.

3. (4) $C=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x\notin\mathbb{Q}, f(x)\in\mathbb{Q}\}$.

הערה: אין קשר בין סעיפים א ו- ב.

**פתרון**

א. הוכח בהרצאה.

ב. 1. נגדיר $\varphi:\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\to A$ הפונקציה המתאימה לכל פונקציה $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ את הפונקציה שמתאימה לכל איבר ב $-\ \mathbb{R}$ את $f(x)$ אם $x$ רציונלי ו $-\ 1$ אחרת.

כלומר, $\forall f\in\mathbb{R}^{\mathbb{Q}},\varphi(f)=g$ כאשר $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הפונקציה $\varphi$ היא פונקציה הפיכה. לכן $|A|=|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}|=\aleph^{\aleph_0}=\aleph$.

2. נגדיר $\varphi:\mathbb{R}^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\to B$ הפונקציה המתאימה לכל פונקציה $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ את הפונקציה שמתאימה לכל איבר ב $-\ \mathbb{R}$ את $f(x)$ אם $x$ אי-רציונלי ו $-\ 1$ אחרת.

כלומר, $\forall f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}},\varphi(f)=g$ כאשר $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\notin\mathbb{Q} \\ 1 & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הפונקציה $\varphi$ היא פונקציה הפיכה. לכן $|A|=|\mathbb{R}^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}|=\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$.

3. פתרון: תהי $\varphi:\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\to C$ הפונקציה המתאימה לכל זוג פונקצות $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ ו - $g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ את הפונקציה שמתאימה לכל איבר ב $-\ \mathbb{R}$ את $f(x)$ אם $x$ רציונלי ואת $g(x)$ אחרת. כלומר,

$\forall (f,g)\in\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}},\varphi(f,g)=h$ כאשר $h(x)=\begin{cases} g(x) & x\notin\mathbb{Q} \\ f(x) & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הפונקציה $\varphi$ היא פונקציה הפיכה. לכן

$|C|=|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}|=\aleph^{\aleph_0}\cdot{\aleph_0}^{\aleph}=\aleph\cdot 2^{\aleph}=2^{\aleph}$.

**ענה בפירוט בדף זה**

## שאלה 3

תהיינה $A,B$ קבוצות לא ריקות ותהי $f:A\to B$ פונקציה.
נניח ש $(A,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. נגדיר יחס $\le_f$ על $B$ באופן הבא:
$f(a_1)\le_f f(a_2)\Leftrightarrow a_1\le a_2$ .

**א.** (2) תן דוגמה לקבוצה סדורה חלקית $(A,\le)$.

ב. (3) באמצעות הדוגמה שנתת בסעיף א רשום דוגמה ל $(B,\le_f)$.

ג. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. (7) אם $(A,\le)$ היא קבוצה סדורה חלקית ו $f:A\to B$ על אז $(B,\le_f)$ קבוצה סדורה חלקית.
2. (8) אם $(A,\le)$ קבוצה סדורה ליניארית ו $f$ פונקציה הפיכה אז $(B,\le_f)$ קבוצה סדורה ליניארית.

**פתרון**

א. $A=\{1,2,3\}$ עם הסדר $1,2,3$

ב. ניקח $B=\{1,2\}$ ו- $f:A\to B$ מוגדרת ע"י $f(1)=1,f(2)=2,f(3)=1$ . לכן $\le_f=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$ .

ג. i. לא נכון. ניקח את הדוגמאות מ-א ו-ב. $(B,\le_f)$ איננה קס"ח (לא אנטיסימטרית).

ii. נכון. רפלקסיביות: יהי $b\in B$ . $f$ על ולכן קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$ . מתקיים $a\le a$ ולכן $f(a)\le_f f(a)$ כלומר $b\le_f b$ . אנטי סימטריות: יהיו $b_1,b_2\in B$ כך ש- $b_1\le_f b_2$ וגם $b_2\le_f b_1$ . $f$ פונקציה הפיכה ולכן קיימים $a_1,a_2\in A$ **יחידים** כך ש- $f(a_1)=b_1,f(a_2)=b_2$ . לפי הגדרה נקבל $a_1\le a_2\wedge a_2\le a_1$ ולכן $a_1=a_2$ . מכאן $b_1=b_2$ . טרנזיטיביות: יהיו $b_1,b_2,b_3\in B$ כך ש- $b_1\le_f b_2$ וגם $b_2\le_f b_3$ . $f$ פונקציה הפיכה ולכן קיימים $a_1,a_2,a_3\in A$ **יחידים** כך ש- $f(a_1)=b_1,f(a_2)=b_2,f(a_3)=b_3$ . לפי הגדרה נקבל $a_1\le a_2\wedge a_2\le a_3$ ולכן $a_1\le a_3$ . מכאן $b_1\le_f b_3$ . סדר מלא: יהיו $b_1,b_2\in B$ . $f$ פונקציה על ולכן קיימים $a_1,a_2\in A$ כך ש- $f(a_1)=b_1,f(a_2)=b_2$ . $(A,\le)$ קבוצה סדורה ליניארית ולכן $a_1\le a_2\vee a_2\le a_1$ . מכאן $b_1\le_f b_2\vee b_2\le_f b_1$ .

**ענה בפירוט בדף זה**

## שאלה 4

$n\in\mathbb{N}$ יקרא פריק אם קיימים $t,s\in\mathbb{N}$ שונים מ-1 כך ש-$st=n$.
תת קבוצה $A$ של הטבעיים תקרא סגורה לפריקים אם לכל $x,y\in A$ מתקיים ש-$x+y$ פריק.

א. (2) תהי $A$ קבוצה סגורה לפריקים. הסבר מדוע $1\notin A$.
ב. (14) הוכח שקיימת קבוצה סגורה לפריקים מקסימלית ביחס להכלה.
ג. (4) תהי $B$ קבוצה סגורה לפריקים מקסימלית ביחס להכלה. הוכח שעוצמתה $\aleph_0$.

**פתרון**

1. אם $1\in A$ ו $A$ קבוצה סגורה לפריקים אז $1+1$ פריק בסתירה לכך ש 2 לא פריק.
2. נגדיר קבוצה $\Omega=\{A\subseteq\mathbb{N}|\ A$ סגורה לפריקים$\}$ ונוכיח שיש איבר מקסימאלי ב $\Omega$.

$\Omega$ לא ריקה מכיוון שהקבוצה $A=\{2\}$ סגורה לפריקים. הרי $2+2$ פריק.
נגדיר יחס סדר על $\Omega$ באופן הבא: $A_1\subseteq A_2\Leftrightarrow A_1\leq A_2$ (מההרצאה אנחנו יודעים שזהו יחס סדר חלקי). יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ב $\Omega$. נוכיח שלשרשרת יש חסם מלעיל ב $\Omega$.
נסמן $A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ ונוכיח ש $A$ חסם מלעיל ב $\Omega$.
נוכיח תחילה ש $A\in\Omega$ ז"א צ"ל ש $A$ קבוצה סגורה לפריקים. יהיו $x,y\in A$ נוכיח ש $x+y$ איבר פריק. מכיוון ש $x,y\in A$ אז $x,y\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ על פי הגדרת האיחוד קיימים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $x\in A_\alpha$ ו $y\in A_\beta$ מכיוון ש $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ב $\Omega$ ניתן להניח ב.ה.ג.כ ש $A_\alpha\subseteq A_\beta$ ומכיוון ש $x\in A_\alpha$ נקבל ש $x\in A_\beta$.
$A_\beta\in\Omega$ ובנוסף $x,y\in A_\beta$ ולכן $x+y$ איבר פריק ז"א $A\in\Omega$. על פי הגדרת האיחוד נקבל שלכל $\alpha\in I$ $A_\alpha\subseteq A$ ולכן $A$ חסם מלעיל ב $\Omega$ לשרשרת $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ועל פי הלמה של צורן קיימת קבוצה סגורה לפריקים מקסימאלית ביחס להכלה.

3. מכיוון ש $B\subseteq\mathbb{N}$ נקבל ש $B$ בת מניה ולכן מספיק להוכיח ש $B$ איננה קבוצה סופית. נניח בשלילה ש $B$ סופית ז"א $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$. נסמן

$b=\prod_{i=1}^{n} b_i$ ונוכיח שהקבוצה $B\cup\{b\}$ סגורה לפריקים. מכיוון ש $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ סגורה לפריקים מספיק להראות שלכל $1\le j\le n$ $b_j+b$ פריק. $b_j+b=b_j+\prod_{i=1}^{n} b_i=b_j\left(1+\frac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{b_j}\right)$. מכיוון ש $B$ סגורה לפריקים נקבל מסעיף א ש $b_j\neq 1$ ובנוסף $\frac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{b_j}\neq 0$ ולכן $1+\frac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{b_j}\neq 1$ וקיבלנו ש $B\cup\{b\}$ קבוצה סגורה לפריקים בסתירה למקסימאליות של $B$ ביחס להכלה.

**ענה בפירוט בדף זה**

## שאלה 5

תהי $A$ קבוצה ותהי $g:A\to A$ פונקציה כך שהפונקציה המצומצמת $g|_{im(g)}$ חח"ע. נגדיר $R=\{(x,y)\in A^2 \mid g(x)=g(y)\}$.

א. (4) הוכח ש- $R$ הינו יחס שקילות על $A$.

ב. (4) נגדיר $f:A/R\to A/R$ ע"י $\forall x\in A,\ f([x])=[g(x)]$. הוכח ש- $f$ מוגדרת היטב.

ג. (4) הוכח ש- $f$ הנ"ל חח"ע.

ד. (4) הוכח שאם $A$ קבוצה סופית אז $f$ הנ"ל על.

ה. (4) תן דוגמא שבה $f$ הנ"ל איננה על.

**פתרון**

א. רפלקסיביות: יהי $x\in A$ מכיוון ש $g$ פונקציה נקבל ש $g(x)=g(x)$ ז"א $(x,x)\in R$.

סימטריות: יהיו $x,y\in A$ כך ש $(x,y)\in R$ ז"א $g(x)=g(y)$ ולכן $g(y)=g(x)$ ז"א $(y,x)\in R$.

טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ כך ש $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R$ ז"א $(x,z)\in R\Leftarrow g(x)=g(z)\Leftarrow g(x)=g(y)\wedge g(y)=g(z)$.

ב. יהי $y\in[x]$ צריך להוכיח ש $g(y)\in[g(x)]$. מכיוון ש $y\in[x]$ נקבל ש $(x,y)\in R$ ז"א $g(x)=g(y)$ ומהרפלקסיביות נקבל ש $(g(x),g(y))\in R$ ולכן $g(y)\in[g(x)]$.

ג. נניח ש $[x],[y]\in A/R$ כך ש $[g(y)]=[g(x)]$ ז"א $g(y)\in[g(x)]$ ולכן $(g(x),g(y))\in R$ ז"א $g(g(x))=g(g(y))$, שימו לב ש $g(x),g(y)\in \operatorname{Im} g$ ומכיוון ש $g|_{im(g)}$ חח"ע נקבל ש $g(x)=g(y)$ ז"א $(x,y)\in R$ ולכן $[x]=[y]$.

ד. אם $A$ קבוצה סופית אז $A/R$ קבוצה סופית. נתון ש $f:A/R\to A/R$ חח"ע ומכיוון ש $\left|A/R\right|=\left|A/R\right|$ ובנוסף $A/R$ קבוצה סופית אז בהכרח $f$ על.

ה. תהיי $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $g(x)=2x$ ואז $f:\mathbb{N}/R\to\mathbb{N}/R$ לא על מכיוון שאין מקור ל $[3]$

**ענה בפירוט בדף זה**

## שאלה 6

א. יהי $n\in\mathbb{N}$. נתונים $n$ דרדסים, $n$ קטקטים ו - $n$ טרולים. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה:

1. (2) בלי מגבלות.
2. (3) קונדסון(הדרדס) וטיפטיפ (הקטקט) אינם מוכנים לשבת אחד ליד השני.
3. (3) כל הדרדסים ישבו צמודים, כל הקטקטים ישבו צמודים וכל הטרולים ישבו צמודים.
4. (4) אסור ש-2 טרולים ישבו אחד ליד השני.
5. (4) בין קונדסון (הדרדס) וטיפטיפ (הקטקט) יש לפחות $3n-3$ יצורים.

ב. תהיינה $A,B$ קבוצות. הוכח או הפרך:

1. (3) $P(A\cup B)\supseteq P(A)\cup P(B)$.
2. (3) $P(A\cup B)\subseteq P(A)\cup P(B)$.

הערה: אין קשר בין סעיפים א ו- ב.

**פתרון**

א.

1. נערבב את $3n$ היצורים וזאת ב-$(3n)!$ דרכים.
2. נספור את כל המקרים ונפחית את המקרים בהם קונדסון וטיפטיף יושבים אחד ליד השני(נקח אותם כגוש ונערבב יחד עם כולם). נקבל

$(3n)!-(3n-1)!\cdot 2!$.

3. ניקח את הדרדסים כגוש, את הקטקטים כגוש ואת הטרולים כגוש. יש $3!$ אפשרויות לערבב את הגושים ואז יש לערבב את הדרדסים, הקטקטים והטרולים. לכן $3!\cdot n!\cdot n!\cdot n!$.

4. נמקם את הדרדסים הקטקטים וזאת ב-$(2n)!$ דרכים ואז נמקם את הטרולים ברווחים (כולל הקצוות) וזאת ב-$p(2n+1,n)=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}$ דרכים. לכן נקבל $(2n)!\cdot p(2n+1,n)$.

5. קונדסון וטיפטיפ יכולים להיות בקצוות או שאחד מהם נמצא במקום ליד הקצה (והאחר בקצה). לכן יתכנו 3 מקרים (ובכל אחד מהם ניתן להחליף את המקומות של קונדסון וטיפטיפ). בכל אחד מהמקרים הללו נותר למקם את $3n-2$ היצורים שנותרו. לכן נקבל $3\cdot 2!\cdot(3n-2)!$.

ב.

1. נכון

$x\in P(A)\cup P(B)$ ז"א $x\in P(A)\vee x\in P(B)$ נניח ב.ה.ג.כ ש $x\in P(A)$ ז"א $x\subseteq A$ ולכן $x\subseteq A\cup B$ ז"א $x\in P(A\cup B)$.

2. לא נכון

$A=\{1\},B=\{2\}\Rightarrow P(A)=\{\varnothing,\{1\}\},P(B)=\{\varnothing,\{2\}\}\Rightarrow P(A)\cup P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\}\}$

אבל $P(A\cup B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.