תרגיל 6 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^7}{z-1}\mathrm{d}z$$

פתרון: שימוש ישיר במשפט קושי ($f(z)=(z+1)^7$ $z_0=1$) נותן לנו

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^7}{z-1}\mathrm{d}z = 2\pi i(1+1)^7 = 256\pi i$$

(ב)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z$$

פתרון: שימוש ישיר במשפט קושי נותן לנו

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

(ג)

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)}\mathrm{d}z$$

כאשר $-1 \le t \le 1 \quad \gamma(t)=it$
פתרון: אפשר כאן פשוט להציב לפי הגדרה

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)}\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{1} \frac{i}{(it)^2-1}\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \frac{-i}{t^2+1}\mathrm{d}t = -i\,\arctan t|_{-1}^{1} = -i(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}) = -i\frac{\pi}{2}$$

(ד)

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

כאשר $t\in\mathbb{R}$.
פתרון: שתי נקודות חוסר האנליטיות $\pm i$ נמצאות בתוך התחום ולכן אי אפשר

להשתמש ישירות במשפט קושי. נגדיר שתי מסילות קטנות. D_1 סביב i ו D_2 סביב $-i$ ואז

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int\limits_{D_1} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z + \int\limits_{D_2} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

לפי משפט קושי

$$\int\limits_{D_1} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int\limits_{D_1} \frac{e^{tz}}{(z-i)(z+i)}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{e^{it}}{2i} = \pi e^{it}$$

ו

$$\int\limits_{D_2} \frac{e^{tz}}{(z-i)(z+i)}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{e^{-it}}{-2i} = -\pi e^{-it}$$

בסך הכל מתקבל

$$\pi e^{it} - e^{-it} = 2\pi \sin t$$

אפשר לפתור גם על ידי פיצול לשברים חלקיים.

(ה)

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$$

פתרון: לפי נוסחת קושי לנגזרות עם

$$f(z) = e^{2z}$$

נקבל ש

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{3!}f^{(3)}(-1) = \frac{2\pi i}{6}\cdot 8e^{-2} = \frac{8\pi i}{3e^2}$$

(ו)

$$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z^2-z}\mathrm{d}z$$

פתרון: הפתרון ה"נכון" זה לשים לב שבעיית האנליטיות של $\frac{\sin z}{z}$ ב $z=0$ היא סליקה. ולכן יש רק בעיית אנליטיות אחת. אבל אין לנו כלים עדיין בשביל להסביר את זה. אז נאלץ לפעול בשיטות אחרות.

יש 2 בעיות אנליטיות בתחום המדובר, 0 ו 1. אפשר להקיף כל את 0 ע"י מסילה קטנה D_1 ואת 1 ע"י מסילה קטנה D_2 ואז

$$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z^2 - z} \mathrm{d}z = \int\limits_{D_1} \frac{\sin z}{z^2 - z} \mathrm{d}z + \int\limits_{D_2} \frac{\sin z}{z^2 - z} \mathrm{d}z$$

ואז לפי נוסחת קושי

$$\int\limits_{D_1} \frac{\sin z}{z^2 - z} \mathrm{d}z = 2\pi i \frac{\sin 0}{0-1} = 0$$

ו

$$\int\limits_{D_2} \frac{\sin z}{z^2 - z} \mathrm{d}z = 2\pi i \frac{\sin 1}{1} = 2\pi i \sin 1$$

(ז)

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} \mathrm{d}z$$

פתרון: קל לראות שבעצם יש לנו:

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2 (z-1)^2} \mathrm{d}z$$

בתחום המדובר

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2}$$

אנליטית ולכן

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2 (z-1)^2} \mathrm{d}z = 2\pi i f'(1) = 2\pi i \frac{-\sin \pi \cdot 4 - 2(1+1)\cos \pi}{2^4} = \frac{\pi i}{2}$$

2. יהי $k \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) \mathrm{d}\theta = 0$$

רמז: חשבו את

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} \mathrm{d}z$$

פתרון: נחשב את

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} \mathrm{d}z$$

בשתי דרכים שונות. מצד אחד לפי פרמטריזציה

$$\gamma(t) = e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

שאז האינטגרל יוצא

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ke^{it}}}{e^{it}} ie^{it} \mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} e^{ke^{it}} \mathrm{d}t$$
$$= i \int_0^{2\pi} e^{k\cos t + ki\sin t} \mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} e^{k\cos t}(\cos(k\sin t) + i\sin(k\sin t))\mathrm{d}t$$

כלומר זה שווה ל

$$-\int_0^{2\pi} e^{k\cos t} \sin(k\sin t))\mathrm{d}t + i\int_0^{2\pi} e^{k\cos t}(\cos(k\sin t)\mathrm{d}t$$

מצד שני חישוב של האינטגרל לפי משפט קושי נותן לנו ש

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

מהשוואה של חלק ממשי ודמיוני נקבל

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos t}(\cos(k\sin t)\mathrm{d}t = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos t} \sin(k\sin t))\mathrm{d}t = 0$$

שזה מה שנדרש

3. נגדיר פונקציה בתחום $|z| < 3$ לפי

$$f(z) = \int\limits_{|w|=3} \frac{3w^2+7w+1}{w-z} \mathrm{d}w$$

מצאו את $f'(1+i)$.
פתרון: נגדיר $g(z) = 3z^2+7z+1$. לפי נוסחת קושי, לכל $z \in \{z \mid |z| < 3\}$ מתקיים

$$\int\limits_{|w|=3} \frac{3w^2+7w+1}{w-z} \mathrm{d}w = 2\pi i g(z)$$

ולכן

$$f(z) = 2\pi i(3z^2+7z+1)$$

ואז

$$f'(z) = 2\pi i(6z+7)$$

כלומר

$$f'(1+i) = -12\pi + 26\pi i$$