בס"ד

אלגברה מופשטת 1
פתרון (מקוצר) של מועד א' קיץ תשע"ד

שאלה 1: כתוב ונמק בקצרה לגבי כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או לא:

א. דרגת החבורה $\mathbb{Z}_{200}\times\mathbb{Z}_{100}\times\mathbb{Z}_3$ היא 2.

ב. קיים איזומורפיזם: $U_{14}\simeq U_{18}$.

ג. קיים מונומורפיזם: $\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}$.

ד. תיתכן פעולה הומוגנית של חבורת p (p מס' ראשוני) על קבוצה בת $p+1$ איברים.

פתרון:

א. כן: כיוון ש: $(100,3)=1$ עפ"י משפט: $\mathbb{Z}_{200}\times\mathbb{Z}_{100}\times\mathbb{Z}_3\simeq\mathbb{Z}_{200}\times\mathbb{Z}_{300}=\langle(1,0),(0,1)\rangle$.

ב. כן: שתי החבורות הן ציקליות מסדר 6 ולכן הן איזומורפיות.

ג. לא: ההומו' היחיד שקיים הוא הטריוויאלי שכן אם $1\mapsto a\neq 0$ אזי מתוך שימור פעולה:
$0\equiv 6\mapsto 6a\neq 0$ בסתירה לתכונה יסודית של הומו' של חבורות, והטריוויאלי אינו מונו'.

ד. לא: אם יש רק מסלול אחד, כלומר באורך $p+1$ אז הוא לא מחלק את גודל החבורה p.

שאלה 2: תהא G הקבוצה: $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{pmatrix} : x,y\in F, x\neq 0\right\}$ עם פעולת מכפלת מטריצות,

באשר F הוא שדה כלשהו.

א. הראה כי G חבורה.

ב. הראה כי G פתירה.

ג. בהינתן $F=\mathbb{Z}_3$, מהי הדרגה של G?

פתרון:

א. אסוצ' נורשת ממכפלת מטריצות. כמו כן היחידה שייכת, את הסגירות קל לבדוק וההופכי של $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ הוא $\begin{pmatrix} x^{-1} & -\frac{y}{x} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, כלומר שייך לחבורה.

ב. קומוטטור כללי הוא מהצורה: $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{-1} & -\frac{y}{x} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ באשר $z\in F$. לכן: $G'\leq\left\langle\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1\end{pmatrix} : z\in F\right\rangle$ וזו חבורה אבלית לכן: $G''=\{e\}$ ו-G פתירה.

ג. אם $F=\mathbb{Z}_3$ אזי G היא לא אבלית מסדר 6, כלומר איזו' ל-D_3 בעלת שני יוצרים.

שאלה 3:

א. צטט והוכח את משפט Cayley.

ב. תן דוגמה מפורשת לכל אחד מן ה<u>מונומורפיזמים</u> הבאים:

1. $\mathbb{Z}_{2014} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 2. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to A_4$.

פתרון:

א. ראה בהרצאה.

ב. 1. כיוון ש- $\mathbb{Z}_{2014}$ ציקלית מספיק להראות לאן עובר היוצר 1.

אם למשל: $\bar{1} \mapsto \frac{1}{2014} + \mathbb{Z}$ אז בסה"כ: $\bar{k} \mapsto \frac{k}{2014} + \mathbb{Z}$.

2. נמספר את איברי החבורה בסדר כלשהו. למשל: $G = \left\{ \underbrace{(0,0)}_{1}, \underbrace{(0,1)}_{2}, \underbrace{(1,0)}_{3}, \underbrace{(1,1)}_{4} \right\}$.

כיוון ש: $G = \langle (0,1),(1,0) \rangle$ מספיק למצוא שיכון של שני יוצרים אלו. נבדוק את האופן בו

הם מתמירים את איברי G: $(0,1) + (1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 1\ 4\ 3)$ לכן: $(0,1) \mapsto (1\ 2)(3\ 4)$.

באופן דומה נגדיר: $(1,0) \mapsto (1\ 3)(2\ 4)$. שתי התמונות הללו שייכות ל- A_4 .

בסה"כ: $(\bar{m},\bar{n}) \mapsto (13)^m (24)^m (12)^n (34)^n$.

שאלה 4:

א. הראה כי בחבורה G: $\forall g,h \in G : o(gh) = o(hg)$.

ב. הראה שכל שני איברים צמודים בחבורה סופית הם בעלי אותו הסדר.

ג. תהא חבורה G ונניח של- $g \in G$ יש בדיוק שני איברים צמודים שונים, כולל g עצמו. הוכח כי G אינה פשוטה.

פתרון:

א. נסמן: $o(gh) = m$ ונקבל:

$$e = (gh)^m = gh \cdot gh \cdots gh = g \cdot (hg)^{m-1} \cdot h \;\Rightarrow\; g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1} = (hg)^{m-1} \;\Rightarrow\; e = (hg)^m$$

כלומר: $o(hg) \le m = o(gh)$ באותו האופן אפשר גם להראות הפוך ומכאן השוויון.

ב. עפ"י סעיף א' נקבל: $\forall g,h \in G : o\left(ghg^{-1}\right) = o\left(hgg^{-1}\right) = o(h)$.

ג. בפעולת ההצמדה של G על עצמה המסלולים הם מחלקות הצמידות. אם המחלקה של g

היא באורך 2 אז: $[G : Stb(g)] = 2$ מכאן ש: $Stb(g)$ תח"נ לא טריוויאלית ב- G .

שאלה 5:

א. צטט והוכח את משפט סילו 3.

ב. הראה כי בחבורה החופשית עם שני יוצרים $F_2=F(x,y)$ קיימת תח"נ H כך ש:

$F_2/H \simeq S_{2014}$.

פתרון:

א. ראה בהרצאה.

ב. ראינו בהרצאה כי $S_{2014}=\langle(12),(123\ldots2014)\rangle$. נגדיר אפי': $F_2=F(x,y)\to S_{2014}$ ע"י: $x\mapsto(1\,2),y\mapsto(1\,2\,3\ldots2014)$. אכן, כיוון שהחבורה במקור חופשית, כלומר אין בה יחסים לא טריוואליים, ההעתקה משמרת פעולה כלומר היא הומו' וגם על היוצרים של הטווח. הגרעין הוא נורמלי והתוצאה מתקבלת עפ"י משפט איזו' 1.

שאלת בונוס:

הראה שכל חבורת Heisenberg $\mathbb{H}(F)$ מעל שדה F כלשהו היא מכפלה חצי ישרה של שתי ת"ח אבליות.

פתרון:

$\mathbb{H}(F)\simeq X\rtimes Y$ באשר: $X=\left\{\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}:x,z\in F\right\},Y=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}:y\in F\right\}$.

שתי הת"ח הן אבליות, X נורמלית, החיתוך שלהן טריוויאלי והן יוצרות יחד את כל החבורה.

בהצלחה ושנה טובה !

☺