חשבון אינפי 1
תרגיל 6-פתרון

1. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right)=0$ לכל $p=1,2,...m,...$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

תשובה: הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ טור הרמוני מתבדר, אבל

$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+p}\right)=0$ כסכום סופי של מחוברים שכל אחד מהם שואף לאפס.

2. יהיו הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חיוביים ומתבדרים. מה ניתן להגיד על התכנסות הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$.

תשובה: נתבונן ב- $\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$

$a_n\le\max\{a_n,b_n\}$ לכל n ונתון ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר ולכן לפי מבחן ההשוואה גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$ מתבדר.

על התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ לא ניתן להגיד כלום.

לדוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}=0+1+0+1...$ טור מתבדר (האיבר הכללי לא שואף לאפס) וגם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}=1+0+1+0...$ מתבדר מאותה סיבה, אבל $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$ מתכנס.

לעומת זאת אם ניקח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-...$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+...$ שני טורים מתבדרים, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$ מתבדר.

3. הוכיחו כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n\ge 0)$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$ מתכנס.

האם גם הטענה ההפוכה נכונה ?

פתרון:

נתון: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\left(a_n \geq 0\right)$ מתכנס

נוכיח כי $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ מתכנס.

נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. הגבול שווה לאפס, כי זהו תנאי הכרחי להתכנסות טורים ונתון ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי גם $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ מתכנס.

הטענה ההפוכה אינה נכונה.

דוגמא נגדית : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ מתכנס, אבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

4. השתמשו בקריטריון קושי על מנת להוכיח שהטורים הבאים מתכנסים :

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n},\left(\left|a_n\right|<10\right)$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. צריך למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $p\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|S_{n+p}-S_n\right|<\varepsilon$.

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{10^{n+2}}+\ldots+\frac{a_{n+p}}{10^{n+p}}\right|<\left|\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\right|+\left|\frac{a_{n+2}}{10^{n+2}}\right|+\ldots+\left|\frac{a_{n+p}}{10^{n+p}}\right|$$

$$<\frac{10}{10^{n+1}}+\frac{10}{10^{n+2}}+\ldots+\frac{10}{10^{n+p}}=\frac{1}{10^n}+\frac{1}{10^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{10^{n+p-1}}$$

$$=\frac{1}{10^n}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^p}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^p}}{9}<\frac{1}{9\cdot10^{n-1}}<\varepsilon$$

- המעבר הראשון באי השוויון למעלה לפי אי שוויון המשולש
- המעבר השני נובע מהנתון $\left|a_n\right|<10$
- וזהו סכום של p איברים של סדרה הנדסית בעלת איבר ראשון $\frac{1}{10^n}$ ומנה $q=\frac{1}{10}$.

אי השוויון האחרון מתקיים אם ורק אם

$$10^{n-1}>\frac{1}{9\varepsilon}\Leftrightarrow n-1>\log_{10}\frac{1}{9\varepsilon}\Leftrightarrow n>1+\log_{10}\frac{1}{9\varepsilon}$$

ולכן נבחר $N\left[=1+\log_{10}\frac{1}{9\varepsilon}\right]+1$ והוכחנו.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + .\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

אי השוויון האחרון מתקיים אם ורק אם $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ולכן ניתן לבחור $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

והוכחנו.

5. השתמשו במבחני התכנסות על מנת לבדוק האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים :

א. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|1000^n\right|}{n!}$

נשתמש במבחן דלאמבר

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000^{n+1} n!}{1000^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$ ולכן הטור הנתון מתכנס.

ב. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2n+2)!(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

ג. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right)^{\frac{n}{n+1}} = e^{-1} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

ד. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1} 2^n n!} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right)^{\frac{n}{n+1}} = 2 \cdot e^{-1} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n n!}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right)^{\frac{n}{n+1}}=3\cdot e^{-1}>1$$

ולכן הטור מתבדר.

ו. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots$

נרשום את האיבר הכללי של הטור

$$\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$$

ונשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+4)2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n+2)4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)}{(4n+2)}=\frac{3}{4}<1$$

ולכן הטור מתכנס.

ז. $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2k+1]{2}\right)$

נשתמש במבחן ההשוואה

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2k+1]{2}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\cdots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)<\left(\sqrt{2}-1\right)^n$$

נשתמש במבחן השורש כדי לבדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^n \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt{2}-1\right)^n}=\sqrt{2}-1<1$$

ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ מתכנס וכאן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2k+1]{2}\right)$ מתכנס.