תרגיל בית 8 אינפי 3

1. נתון מישור ב $\mathbb{R}^3$ על ידי המשוואה

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

כאשר $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ ו (A, B, C) היא מטריצה מדרגה 1 (כלומר לפחות אחד מ A, B, C הוא לא 0).

נתונה נקודה $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. מצאו (בעזרת שיטת כופלי לגרנז') את מרחק הנקודה מהמישור.

תזכורת: מרחק הנקודה a מקבוצה A הוא

$$\inf\{||x - a|| \mid x \in A\}$$

פתרון. הפונקציה שלנו היא:

$$f(x, y, z) = (x - a_1)^2 + (y - a_a)^2 + (z - a_3)^2$$

והאילוץ שלנו הוא:

$$h(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$$

ראשית הגרדיאנט של h הוא

$$\nabla h = (A, B, C)$$

שזת מטריצה מדרגה 1 ולכן כל נקודת קיצון צריכה לקיים את המשוואות של כופלי לגרנז'

הלגרנז'יאן הוא:

$$L(x, y, z, \lambda) = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$$

לכן המשוואות הן:

$$2(x - a_1) + \lambda A = 0$$

$$2(y - a_2) + \lambda B = 0$$

$$2(z - a_3) + \lambda C = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

מהמשוואות נקבל ש

$$x = -\frac{\lambda A}{2} + a_1$$
$$y = -\frac{\lambda B}{2} + a_2$$
$$z = -\frac{\lambda C}{2} + a_3$$

נציב זאת באילוץ ונקבל

$$-\frac{\lambda A^2}{2} + a_i A - \frac{\lambda B^2}{2} + a_2 B - \frac{\lambda Z^2}{2} + a_3 C + D = 0$$

אם נסמן $v = (A, B, C)$ ו $a = (a_1, a_2, a_3)$ אז קיבלנו ש

$$-\lambda \frac{v \cdot v}{2} + a \cdot v + D = 0$$

$$\lambda = \frac{2D + 2a \cdot v}{v \cdot v}$$

ולכן

$$x = a_1 - \frac{A(a \cdot v + D)}{v \cdot v}$$
$$y = a_2 - \frac{B(a \cdot v + D)}{v \cdot v}$$
$$z = a_3 - \frac{C(a \cdot v + D)}{v \cdot v}$$

כלומר מצאנו את הנקודה

$$(a_1 - \frac{A(a \cdot v + D)}{v \cdot v}, a_2 - \frac{B(a \cdot v + D)}{v \cdot v}, a_3 - \frac{C(a \cdot v + D)}{v \cdot v})$$

איך יודעים שזו נקודת מינימום? נפעיל שיקול כזה: ניקח כדור סגור שמרכזו ב a עם רדיוס מספיק גדול כך שהוא יחתוך את המישור. החיתוך של המישור עם הכדור היא קבוצה קומפקטית ולכן קיים ל f מינימום עליה. אבל זה יהיה המינימום של f על כל המישור כי כל הנקודות שבחיתוך עם הכדור יותר קרובות לa מאשר הנקודות שמחוצה לו.

כעת נחשב את המרחק:

$$\sqrt{(a_1 - \frac{A(a\cdot v+D)}{v\cdot v} - a_1)^2 + (a_2 - \frac{B(a\cdot v+D)}{v\cdot v} - a_2)^2 + (a_3 - \frac{C(a\cdot v+D)}{v\cdot v} - a_3)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{A(a\cdot v+D)}{v\cdot v}\right)^2 + \left(\frac{B(a\cdot v+D)}{v\cdot v}\right)^2 + \left(\frac{C(a\cdot v+D)}{v\cdot v}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a\cdot v+D)^2}{(v\cdot v)^2}(A^2+B^2+C^2)} =$$

$$\sqrt{\frac{(a\cdot v+D)^2}{(v\cdot v)^2} v\cdot v} = \frac{|a\cdot v+D|}{\sqrt{v\cdot v}}$$

או בצורה יותר מפורשת:

$$\frac{|a_1A + a_2B + a_3C + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

שזו הנוסחא המוכרת.

2. מה צריכים להיות המידות של תיבה בעלת שטח פנים מינימאלי שנפחה S? הוכיחו.

פתרון. אם מידות התיבה הן x, y, z אז בעצם מבקשים למצוא קיצון של

$$f(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz$$

תחת האילוץ

$$h(x,y,z) = xyz = S$$

הגרדיאנט של האילוץ הוא

$$\nabla h = (yz, xz, xy)$$

הגרדיאנט יתאפס רק אם לפחות אחד מ x, y, z יהיה 0. אבל זה לא ייתכן כי אז האילוץ $xyz = S$ לא מתקיים. (אלא אם כן $S = 0$ שזה מצב טריויאלי). אז אפשר להשתמש בשיטת כופלי לגרנז. נאמר שאנחנו יודעים שמינימום קיים "משיקולים פיזיקליים".

הלגרנזיאן הוא

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2xz - S)$$

משוואות לגרנז' הן:

$$2y + 2z + \lambda yz = 0$$

$$2x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$xyz = S$$

נחסר את המשוואה השניה מהראשונה ונקבל

$$2x - 2y + \lambda z(x - y) = 0$$

$$(x - y)(2 + \lambda z) = 0$$

אפשרות א': $2 + \lambda z = 0$ ולכן $z = -\frac{2}{\lambda}$ אבל אם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל:

$$2y - 4 - 2y = 0$$

כלומר $-4 = 0$ שזו סתירה.

לכן נשארנו עם אפשרות ב' שהיא: $x = y$.

בדומה מוכיחים שגם $y = z$.

ולפי האילוץ ברור ש

$$x^3 = S$$

כלומר

$$x = y = z = \sqrt[3]{S}$$

כלומר זאת קוביה.

3. מצאו את כל נקודות הקיצון הגלובאליות של הפונקציה

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

תחת האילוץ

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

פתרון. האילוץ כאן הוא קבוצה סגורה וחסומה ולכן נקודות קיצון גלובאליות קיימות.

נסמן

$$h(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1$$

הגרדיאנט הוא

$$\nabla h = (4x^3, 4y^3, 4z^3)$$

הוא מתאפס רק בנקודה $(0,0,0)$ שאינה מקיימת את המשוואות האילוץ. הלגרנזיאן הוא

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^4 + y^4 + z^4 - 1)$$

המשוואות שצריך לפתור הן

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 4\lambda x^3 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda y^3 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + 4\lambda z^3 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$$

כמו שכבר אמרנו, לא ייתכן ש

$$x = y = z = 0$$

עכשיו, אם $x = y = 0$ אז ממשוואת האילוץ נקבל ש $z = 1$ ולכן $(0,0,1)$ היא נקודה חשודה. באופן דומה $(1,0,0),(0,1,0)$הן נוקודות חשודות לקיצון.

אם $x = 0$ אבל $y, z \neq 0$. אז מהמשוואה השניה והשלישית נקבל

$$2 + 4\lambda y^2 = 0$$

$$2 + 4\lambda z^2 = 0$$

ולכן

$$\lambda = -\frac{1}{2y^2}$$
$$\lambda = -\frac{1}{2z^2}$$

לכן

$$z^2 = y^2$$

אם נציב זאת באילוץ נקבל

$$2y^4 = 1$$
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

ולכן בסך הכל נקבל נקודות חשודות לקיצון

$$(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}), (0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}), (0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$$

ובאופן סימטרי נקבל את הנקודות

$$(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0,\frac{1}{\sqrt[4]{2}}),(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0,\frac{1}{\sqrt[4]{2}}),(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0,-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}),(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0,-\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$$
$$(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0),(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0),(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0),(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0)$$

המקרה האחרון שצריך לבדוק הוא כאשר $x,y,z\neq 0$ ואז נקבל

$$\lambda=-\frac{1}{2x^2}=-\frac{1}{2y^2}=-\frac{1}{2z^2}$$

כלומר

$$x^2=y^2=z^2$$

נציב זאת באילוץ ונקבל

$$3x^4=1$$

כלומר

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

ואז נקבל פתרון מהצורה

$$(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$$

(יש כאן 8נקודות שונות לפי בחירת סימנים). עכשיו צריך למצוא באמת את המקסימום והמינימום. לצורך כך נציב את הנקודות החשודות בפונקציה המקורית. למעשה יש שלושה סוגים של נק' חשודות.

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$
$$f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$
$$f(1,0,0)=1^2+0^2+0^2=1$$

ולכן המקסימום מתקבל בנקודות מהסוג השלישי $(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ וערכו $\sqrt{3}$.
המינימום מתקבל בנקודות מהסוג הראשון

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$$

וערכו 1.

4. מצאו את המקסימום והמינימום הגלובאליים של

$$f(x,y,z)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$$

בכדור

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$

פתרון. הכדור הוא קבוצה סגורה וחסומה ולכן קיימים מינימום ומקסימום גלובאליים. צריך לחפש בנפרד נקודות חשודות בתוך הכדור ונקודות חשודות מחוץ לכדור. בתוך הכדור מוצאים כרגיל על ידי השוואה של הגרדיאנט ל 0

$$\nabla f = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3})$$

הגרדיאנט של f לא מתאפס ולכן אין נקודות חשודות בתוך הכדור. נחפש מינימום ומקסימום על השפה

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

באמצעות כופלי לגרנז' כאשר פונקציית האילוץ היא למעשה

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

הגרדיאנט של האילוץ הוא

$$\nabla h = (2x, 2y, 2z)$$

והוא מתאפס רק בנקודה $(0, 0, 0)$ שהיא לא מקיימת את האילוץ. הלגרנזיאן הוא

$$L(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$$

ולכן המשוואות הן

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \sqrt{2} - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{2} - 2\lambda y = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = \sqrt{2} - 2\lambda z = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$

לפי המשוואות הראשונות נקבל

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}y} = \frac{1}{\sqrt{2}z}$$

ולכן

$$x = y = z$$

נציב זאת באילוץ ונקבל

$$3x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ולכן יש שתי נקודות חשודות

$$(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$$

ו

$$(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$$

אם נציב בפונקציה נגלה בקלות ש $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ היא מקסימום ו $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$ היא מינימום.