תרגיל בית 8 אינפי 1 למדמ"ח

1. מצאו מינימום ומקסימום גלובאלי ולוקאלי עבור

$$f(x) = 2|x| - x$$

פתרון: נתחיל בלמצוא נקודות קריטיות. אין נקודות קצה. הפונקציה היא למעשה

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$$

ולכן לכל $x \neq 0$ הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases}$$

לכן אין נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת.

נותרנו עם נקודה קריטית אחת בלבד והיא $x = 0$. לא ניתן לסווג אותה עם מבחן הנגזרת השניה (אין אפילו נגזרת ראשונה ב $x = 0$). אבל אפשר להשתמש בשיטה השניה.

ניקח למשל $u = -1, \quad v = 1$ ואז

$$f(-1) = 1 \quad f(-1) = 3$$

כלומר

$$f(-1), f(1) \geq f(0)$$

ולכן $x = 0$ היא נקודת מינימום לוקאלית. היא גם מינימום גלובאלי כי רואים שהפונקציה יורדת משמאל ל $x = 0$ ועולה מימין ל $x = 0$. לפונקציה הזאת אין נקודות מקסימום גלובאלי/לוקלי.

2. מצאו את הנקודה על העקום

$$y = \frac{2}{x}$$

שמרחקה מראשית הצירים הוא הקטן ביותר. רמז: שימו לב שיש יותר מנקודה אחת כזו.

פתרון: הנקודות על העקום הן מהצורה $(x, \frac{2}{x})$ והמרחק של נקודה כזאת מראשית הצירים הוא

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (\frac{2}{x})^2}$$

הפונקציה הזאת מקבלת מינימום בדיוק כאשר

$$f(x) = x^2 + (\frac{2}{x})^2 = x^2 + \frac{4}{x^2}$$

מקבלת מינימום (גלובאלי). נחפש נקודות חשודות. אין נקודות קצה או נקודות שבהן הפונקציה לא גזירה. נותר לבדוק את הנגזרת

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x^3}$$

זה מתאפס כאשר

$$2x = \frac{8}{x^3}$$

כלומר

$$x^4 = 4$$

כלומר

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$x = \sqrt{2}$ היא נקודה קריטית יחידה בתחום $(0, \infty)$ ו $x = -\sqrt{2}$ היא נקודה קריטית יחידה בתחום $(-\infty, 0)$ נראה מה קורה מסביבן.

נבחר $u = -2, v = -1$ ונקבל

$$f(u) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$f(v) = 5$$

ו

$$f(-\sqrt{2}) = 4$$

אז למעשה

$$f(-\sqrt{2}) \leq f(u), f(v)$$

ולכן $-\sqrt{2}$ היא המינימום הגלובאלי בקטע $(-\infty, 0)$. בדומה:

$$f(\sqrt{2}) < f(1), f(2)$$

ולכן $\sqrt{2}$ היא המינימום הגלובאלי בקטע $(0, \infty)$. איזה משתי הנקודות היא מינימום גלובאלי בכל תחום ההגדרה?

$$d(\sqrt{2}) = d(-\sqrt{2}) = 2$$

ולכן $\pm\sqrt{2}$ שתיהן מינימום גלובאלי.
למסקנה: הנקודות $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ו $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ הן הנקודות המבוקשות.

3. חקרו את הפונקציות הבאות (נקודות קיצון גלובאליות ולוקליות, תחומי עליה וירידה, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, ציור):

(א) $f(x) = x \ln x$

פתרון: שים לב שהפונקציה מוגדרת רק כאשר $x > 0$. נגזור:

$$f'(x) = \ln x + 1$$

הנגזרת שלילית כאשר $x < \frac{1}{e}$ וחיובית כאשר $x > \frac{1}{e}$. הנגזרת מתאפסת כאשר $x = \frac{1}{e}$. נסתכל על הנזגרת השניה:

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

תמיד חיובי. לכן למסקנה:

תחומי עליה: $(\frac{1}{e}, \infty)$

תחומי ירידה: $(0, \frac{1}{e})$

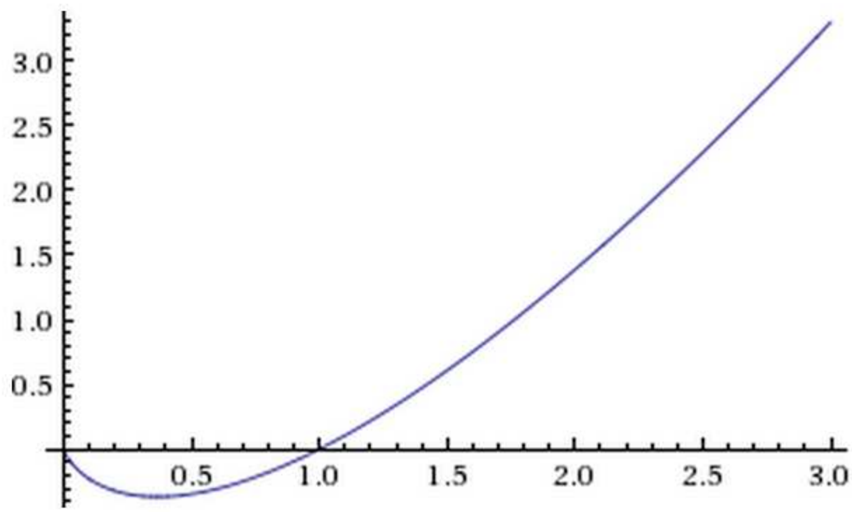
קיצון: $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ מינימום גלובאלי.

תחומי קעירות: $(0, \infty)$

תחומי קמירות: אין.

נקודות פיתול: אין.

ציור:



(ב) $f(x) = \sin^2 x$ בתחום $[0, 2\pi]$

פתרון: הנגזרת היא

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

הנגזרת מתאפסת עבור

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

נבדוק מה ערכי הנגזרת בין לבין:

הנגזרת חיובית = תחומי עליה: $(0, \frac{\pi}{2}), (\pi, \frac{3\pi}{2})$

הנגזרת שלילית = תחומי ירידה: $(\frac{\pi}{2},\pi),(\frac{3\pi}{2},2\pi)$.
ולכן ברור ש:$x=0,\pi,2\pi$ הן נקודות מינימום מקומיות. ו $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ הן נקודות מקסימום מקומיות. נמצא קיצון גלובאלי לפי השוואה של ערכי הפונקציה בנקודות האלה:

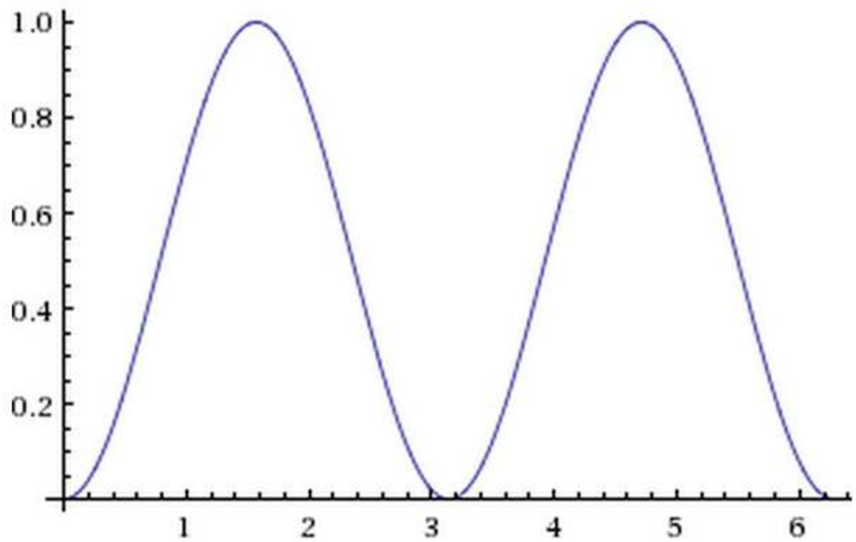
$$f(0)=f(\pi)=f(2\pi)=0$$

$$f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{3\pi}{2})=1$$

נקבל שכל נקודות הקימון הלוקאליות שלנו הן גם קיצון גלובאלי. הנגזרת השניה היא:

$$f''(x)=2\cos 2x$$

ולכן הפונקציה קמורה בתחומים: $[0,\frac{\pi}{4}),(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}),(\frac{7\pi}{4},2\pi]$
והפונקציה קעורה בתחומים: $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}),(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$
ממילא נקודות הפיתול הן: $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.
ציור:



ג) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
פתרון: כרגיל נתחיל בלגזור

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

לכן הפונקציה עולה ב $(-1,1)$ ויורדת ב $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. ממילא ברור ש $x=1$ היא נקודת מינימום (גלובאלי) ו $x=1$ היא נקודת מקסימום (גלובאלי).
נמצא נגזרת שניה

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

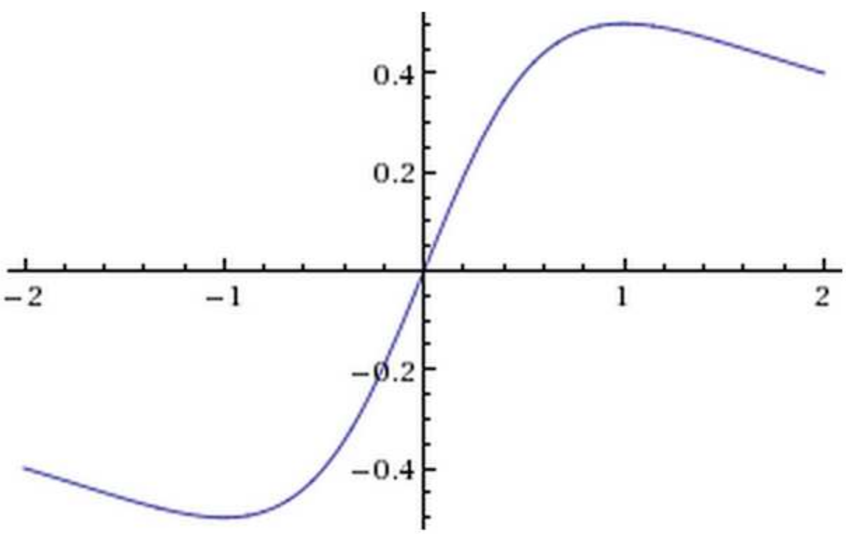
אנחנו רוצים להבין מתי זה חיובי ומתי זה שלילי. אז נתעלם מהמכנה (החיובי במילא) ונתרכז במונה. המונה הוא:

$$-2x(x^2+1)^2 - 4x(1-x^2)(x^2+1)$$

אפשר לצמצם ב x^2+1 שהוא חיובי ממילא ונקבל

$$\begin{aligned}-2x(x^2+1)+4x(1-x^2) &= -2x^3-2x-4x+4x^3\\ &= 2x^3-6x = 2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\end{aligned}$$

מתי זה חיובי? (כלומר מתי הפונקציה קמורה). בתחומים $(\sqrt{3},\infty)$ ו $(-\sqrt{3},0)$ והפונקציה קעורה בתחומים: $(0,\sqrt{3})$ ו $(-\infty,-\sqrt{3})$.
ממילא נקודות הפיתול יתקבלו ב $x=0,\pm\sqrt{3}$.
ציור:



4. מצאו את מספר הפתרונות של המשוואות הבאות בקטע הנתון (אין צורך למצוא את הפתרונות עצמם) הוכיחו קביעתכם.

(א) $x^3+x^2=1$ בקטע $[0,1]$
פתרון: נגדיר

$$f(x)=x^3+x^2-1$$

נשים לב ש

$$f(0)=-1, \quad f(1)=1$$

כלומר לפי משפט ערך הביניים יש ערך c כך ש

$$f(c)=0$$

כלומר יש פתרון למשוואה. בנוסף נשים לב ש

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

שבתחום שלנו זה גדול מאפס כלומר הפונקציה עולה ולכן היא לא יכולה לחתוך את ציר x ביותר ממקום אחד.
מסקנה: יש שורש אחד למשוואה בתחום הנ"ל.

(ב) $e^x = 10x$ בקטע $[0, 10]$
פתרון: נגדיר

$$f(x) = e^x - 10x$$

נשים לב ש

$$f(0) = 1, \quad f(1) = e - 10 < 0, \quad f(10) = e^{10} - 100 > 0$$

לכן לפי משפט ערך הביניים יש לפחות שני שורשים למשוואה. אבל

$$f' = e^x - 10$$

זה שלילי עד $x = \ln 10$ וחיובי משם לכן הפונקציה לא יכולה לחתוך את ציר x יותר מפעמיים.
מסקנה: יש שני שורשים למשוואה בתחום הנ"ל.