תרגול 1

ע"ע ,ו"ע, פולינום
אופייני,ריבוי אלגברי וריבוי
גיאומטרי ודמיון מטריצות

קצת פרטים טכניים:

אושרית שטוסל

מייל: oshritvig@gmail.com

המצגות ייעלו למודל ההקלטות ייעלו גם

שיעורי בית: בmath wiki

ערך עצמי ווקטור עצמי

הגדרה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ עבור סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$

אז נאמר ש- λ הוא "ערך עצמי" של A

וש- v הוא "וקטור עצמי" של A עבור ע"ע λ.

[ערך עצמי = ע"ע , וקטור עצמי = ו"ע]

דוגמ: נתונה $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$

חישוב כפל מטריצה בוקטור

מתקיים $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ אז $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

ע"ע:5
ו"ע : (1,1)

תרגיל: A מטריצה שכל השורות מסתכמות ל α יש ע"ע α

פתרון:

נתון -

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נבחר וקטור $0 \neq v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

נחשב את המכפלה הבאה -

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \dots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{סכום שורה } 1 \\ \vdots \\ \text{סכום שורה } n \end{pmatrix} \underset{\text{לפי הנתון}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underset{\text{לפי הג' ע"ע}}{\Leftarrow}$ α ע"ע של A

איך מוצאים ע"ע בפועל?

מכאן נגזרת השיטה למציאת ע"ע למטריצה.

נבין ע"י דוגמא

דוגמא:

$Av = \lambda v \quad v \neq 0$

$\Downarrow$

$Av - \lambda v = 0 \Rightarrow (A-\lambda I)v = 0$

$|A-\lambda I| = 0$

כי יש למטריצה $B = A-\lambda I$ פתרון לא טריוויאלי. שהרי $v \neq 0$.

לא הפיכה

דוגמה: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ מצא ע"ע ואת הו"ע.

פתרון: מציאת ע"ע: על מנת למצוא ע"ע קודם רוצים למצוא את ה-λ-ות שמקיימות $|A-\lambda I| = 0$.

$$|A-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -5 & 3-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right| \underset{\substack{\text{נוסחה} \\ \text{לפי מינורים} \\ \text{לפי שורה ראשונה}}}{=} (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -5 & 3-\lambda \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)\Big[\underbrace{(3-\lambda)(-4-\lambda)}_{\lambda^2+\lambda-6} - (-6)\Big] - \Big[-5(-4-\lambda) - 6\Big] - \Big[-5\cdot 6 - (3-\lambda)\cdot(-6)\Big]$$

$$= -(3+\lambda)(3+\lambda)(\lambda-2) - 20 - 5\lambda + 6 + 30 - 18 + 6\lambda$$

$$= -(3+\lambda)^2(\lambda-2) - 2 + \lambda = (\lambda-2)\left(1 - (\lambda+3)^2\right) = (\lambda-2)(\lambda+4)(-\lambda-2)$$

מחפשים λ-ות כך ש- $|A-\lambda I|=0$

$\Downarrow$

$$(\lambda-2)(\lambda+4)(-\lambda-2)=0$$

$\Leftarrow$ יש 3 ע"ע $\boxed{\lambda_1=2\ ,\ \lambda_2=-2\ \ \lambda_3=-4}$

כאשר v הוא הו"ע שאנחנו מחפשים

מציאת ו"ע:

① עבור ע"ע $\lambda_1=2$: נחפש את ה- v שמקיים $(A-2I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3-2 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3-2 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & -4-2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{במחברת}} \cdots \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

הפעולות:

① R_2-R_1 ② $R_3 \leftrightarrow R_2$ ③ $\frac{1}{6}R_2$
④ R_1+5R_2 ⑤ $\frac{1}{4}R_1$ ⑥ $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{cases} z=t \\ y=t \\ x-y-z=t-t=0 \end{cases} \leftarrow$$

עבור ע"ע $\lambda_1=2$ הוקטורים העצמיים הם מהצורה $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$

והם יוצרים מרחב עצמי של ע"ע $\lambda_1=2$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}\right\}$

בסיס למרחב זה הוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

* עבור ע"ע $\lambda_2=-2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3+2 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3+2 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -4+2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{① } R_2-R_3 \text{ ② } R_2+R_1 \text{ ③ } \frac{1}{2}R_3 \text{ ④ } R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$z=0$
$y=t$
$x=t$

ולכן $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ הווקטורים העצמיים.

מרחב עצמי: $\left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ובסיס אליו: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

* עבור ע"ע $\lambda_3=-4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3+4 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3+4 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -4+4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{① } R_2-R_3-R_1 \text{ ② } \frac{1}{6}R_3 \text{ ③ } R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$z=t$
$y=\frac{t}{2}$
$x=t-\frac{t}{2}=\frac{t}{2}$

$\leftarrow \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix}$ ובסיס למרחב $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ [או $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ וכו']

תרגיל:

יהיו A, B ריבועיות אזי ל AB ו BA אותם ע"ע.

פתרון:

כיוון 1:

לכל λ ע"ע של AB קיים וקטור $v \in V$, $v \neq 0$ כך ש- $(AB)v = \lambda \cdot v$

נרצה להראות כי λ ע"ע של BA.

מתקיים השוויון - $(AB)v = \lambda \cdot v$

נכפול ב-B משמאל - $B \cdot (AB) \cdot v = B \cdot (\lambda v)$

אסוציאטיביות

$$(BA)(Bv) = \lambda(Bv)$$

$\Leftarrow$ λ ע"ע של BA

כיוון 2: שכל ע"ע של BA הוא ע"ע של AB $\leftarrow$ שיקולי סימטריה $\leftarrow$ דומה.

עבור ע=0 המטריצה AB לא הפיכה ולכן
A או B לא הפיכה ולכן BA לא הפיכה
ולכן בעלת ע"ע 0.

בעצם השיטה למציאת ע"ע זה מציאת שורשים לפ"א

הגדרות:

$|A-\lambda I|$ = "הפולינום האופייני" של A ויסומן $P_A(\lambda)$
לכל ע"ע λ_i של A "הריבוי האלגברי" שלו הוא החזקה של הרכיב $(\lambda_i-\lambda)$ בפולינום האופייני.
לכל ע"ע λ_i של A "הריבוי (נבוב) הגיאומטרי" שלו הוא המימד של המרחב העצמי שלו

דוגמא:

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

מצא את כל הערכים העצמיים של A והריבויים האלגבריים והגיאומטריים שלהם.

פתרון:

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+3\end{pmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_3}{\approx}\begin{pmatrix}-1 & -1 & \lambda+3\\ -1 & \lambda+3 & -1\\ \lambda+3 & -1 & -1\end{pmatrix}\overset{\substack{-R_1+R_2\to R_2\\ (\lambda+3)R_1+R_3\to R_3}}{\approx}\begin{pmatrix}-1 & -1 & \lambda+3\\ 0 & \lambda+4 & -\lambda-4\\ 0 & -\lambda-4 & (\lambda+3)^2-1\end{pmatrix}$$

$$\overset{R_2+R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}-1 & -1 & \lambda+3\\ 0 & \lambda+4 & -\lambda-4\\ 0 & 0 & \lambda^2+5\lambda+4\end{pmatrix}$$

פעולה האלמנטארית היחידה שמשנה את ערך הדטרמיננטה היא החלפת השורות.

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+3\end{pmatrix}\right|=-\left|\begin{pmatrix}-1 & -1 & \lambda+3\\ 0 & \lambda+4 & -\lambda-4\\ 0 & 0 & (\lambda+4)(\lambda+1)\end{pmatrix}\right|.$$

במטריצה משולשית מכפלת האלכסון נותנת את הדטרמיננטה

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+3 \end{pmatrix}\right| = (\lambda+4)^2(\lambda+1) .$$

קיבלנו שני ערכים עצמיים.

$\lambda=-1$ ריבוי אלגברי 1. הריבוי הגיאומטרי גדול או שווה ל 1 וקטן או שווה לריבוי האלגברי ואז הריבוי הגיאומטרי הוא 1.

$\lambda=-4$ ריבוי אלגברי 2.

נמצא את הריבוי הגיאומטרי, ז"א את המימד של המרחב העצמי.

נציב $\lambda=-4$ במטריצה $\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+3 \end{pmatrix}$ ונקבל $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. נמצא את המימד של מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-R_2\to R_2 \\ R_1-R_3\to R_3}}{\approx} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

יש שני משתנים חופשיים, ולכן המימד של מרחב האפס הוא 2 והריבוי הגיאומטרי הוא 2.

תרגיל:

הוכיחו כי למטריצה ולטרנספואוז שלה אותם ערכים עצמיים.

פתרון:

$0 = |A - \lambda I|$ נפעיל transpose → הע"ע של A הם הפתרונות המשוואה הנ"ל.

$0 = |(A - \lambda I)^t|$

$0 = |A^t - (\lambda I)^t|$

$0 = |A^t - \lambda I|$ → הע"ע של A^t הם הפתרונות של המשוואה הנ"ל.

הפתרונות זהים ולכן → הע"ע זהים.

או באופן שקול נראה שיש להם אותו פ"א

דימיון מטריצות

הגדרה: יהיו $A,B\in \mathbb{F}^{n\times n}$.
נאמר ש- B,A "דומות" אם קיימת $P\in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש-

$$B=P^{-1}AP$$

(* דמיון הוא יחס שקילות)

הוכחה :שיעורי בית ☺

תכונות המטריצות הדומות:

1. A,B דומות אז $|A|=|B|$
2. למטריצות דומות אותם ע"ע
3. למטריצות דומות אותו פ"א
4. למטריצות דומות אותה דרגה (rank)

נוכיח לגבי את 1:

$$|B| = |P^{-1}AP| \underset{\text{כפליות הדטרמיננטה}}{=} |P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P| \underset{\text{P הפיכה}}{=} \frac{1}{\cancel{|P|}}\cdot|A|\cdot\cancel{|P|} = |A|$$

נוכיח את 2:

$$|B-\lambda I| = |P^{-1}AP-\lambda I| = |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda P| = |P^{-1}(A-\lambda I)P|$$

$$= |P^{-1}|\cdot|A-\lambda I|\cdot|P| = \frac{1}{\cancel{|P|}}\cdot|A-\lambda I|\cdot\cancel{|P|} = |A-\lambda I|$$

דוגמא למטריצות דומות:

המטריצות:

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ דומות.

הוכחה:

$$\underbrace{\overset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{\text{ההופכית של } P}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\underbrace{\overset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{\text{הפיכה}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

מוזמנים לבדוק חישובית

אם נשאר זמן...

תרגיל: הוכח שאם λ הוא ע"ע של A אז λ^n הוא ע"ע A^n

פתרון: (לא פורמלי)

λ הוא ע"ע של A לכן $\exists v\neq 0$ כך ש: $Av=\lambda v$

מכאן

פורש אינדוקציה

$$A^n v = A^{n-1}(Av) = A^{n-1}\lambda v = \lambda A^{n-1} v = \dots = \lambda\lambda\cdots\lambda v = \lambda^n v \Rightarrow A^n v = \lambda^n v$$

לכן λ^n הוא ע"ע של A^n והו"ע נשאר אותו דבר.

בהצלחה!!