אלגברה ליניארית 1

שאלון סגור

מועד א. 88-112 מרצה: פרופ. א. רזניקוב.

<u>משך בחינה</u>: שעתיים וחצי (**לאחר הארכה**).

<u>הנחיות:</u> יש לפתור **3** מתוך 4 השאלות. (ציון המקסימאלי הוא 100)

אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף</u>. <u>המחברת לא תבדק</u>.

.1

א) תהי $A\in M_{m\times m}(F)$ עם $Rank\ A=m-1$. הוכיחו שאם למערכת $Ax=0$ קיימים פתרונות אזי כל שני פתרונות הם פרופורציונאליים (כלומר אם x_1,x_2 פתרונות אזי $x_1=ax_2$ או $x_2=ax_1$ עם $a\in F$) (17 נק')

ב) תהי $A\in M_{m\times n}(F)$. הוכיחו ש למערכת $Ax=b$, $b\in F^m$ קיים פתרון אם ו רק אם $rank(A)=rank(B)$ כאשר $B=(A|b)\in M_{m\times(n+1)}(F)$ מטריצה מתקבלת מ- A ע"י הוספת עמודה b. (17 נק')

.2 (5 נק') א) הגדירו את המושגים: מרחב האיפוס $Null(A)$ של מטריצה, מרחב עמודות $Cspan(A)$ של מטריצה.

(15 נק') ב) תהיו $A,B\in M_{n\times n}(F)$ כך ש- $Rank\ A+Rank\ B>n$. הוכיחו ש- $AB\neq 0$.

(13 נק') ג) תהי $A\in M_{n\times n}(F)$ כזאת ש- $A^2=0$. הוכיחו ש- $Cspan(A)\subseteq Null(A)$.

.3 (17 נק') א) תהיו $A,B\in M_{n\times n}(F)$ כאלה ש- $Cspan(B)\cap Null(A)=\{0\}$ הוכיחו ש- $Rank\ A\geq Rank\ B$.

(17 נק') ב) יהיו V מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{Z}_2$ משני איברים ו $U\subseteq V$ תת-מרחב. נניח ש $\dim V=2$ ו $\dim U=1$. חשבו כמה יש תתי-מרחב $W\subseteq V$ <u>שונים</u> כך ש $V=U\oplus W$. נמקו את התשובה.

.4 הוכיחו שלמטריצות $A,B\in Mat_{m\times n}(F)$ מתקיימים:

א) $rank(A+B)\leq rank(A)+rank(B)$ (10 נק')

ב) $|rank(A)-rank(B)|\leq rank(A+B)$. (23 נק')

בהצלחה!

<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף</u>. <u>המחברת לא תבדק</u>.

טופס פתרונות *שאלון סגור*

אלגברה ליניארית 1, מועד א. 88-112 מרצה: פרופ. א. רזניקוב.

נא כתבו פיתרון סופי מפורט בטופס זה. במקרה חרום מותר להשתמש בדף נוסף המצורף בסוף הטופס.
ההתייחסות למחברת היא כלטיוטה בלבד.
המחברת לא תבדק.
נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

מס' שאלה	1	2	3	4	
ציון					

פתרון לשאלה : $\boxed{1}$ א. אם $\text{Rank}A=m-1$ אז למרחב הפתרונות $Ax=0$
יש מימד $m-\text{Rank}A=1$. יהי $v\in F^m$ פתרון שונה מ-0 (לדוגמה
פתרון פונדמנטלי הסטנדרטי). בגלל ש-$\dim \text{Null}A=1$ v הוא בסיס
למרחב הפתרונות: $\text{Null}A=\text{Span}(\{v\})$ כלומר כל פתרון
אחר הוא מהצורה $w=a\cdot v$, $a\in F$. אם $w_1,w_2\in F^m$ שני פתרונות
אז $w_1=a_1\cdot v$, $w_2=a_2\cdot v$ $\Leftarrow$ אם $a_1\neq 0$ אז $w_2=\frac{a_2}{a_1}\cdot w_1$
אם $a_2\neq 0$ אז $w_1=\frac{a_1}{a_2}\cdot w_2$ ואם $a_1=a_2=0$ אז $w_1=w_2=0$.

ב. אם קיים פתרון ל $Ax=b$ אז b הוא צ"ל של העמודות
של A ו $\text{Cspan}(A)=\text{Span}(A^1,\dots A^n)=\text{Span}(A^1,\dots A^n,b)=\text{Cspan}B$
$\Leftarrow$ $\text{rank}A=\text{rank}B$

$\Rightarrow$ אם $\text{rank}A=\text{rank}B$ אז $\dim \text{Cspan}A=\dim \text{Cspan}B$
וגם מתקיים $\text{Cspan}A\subseteq \text{Cspan}B$ $\Leftarrow$ $\text{Cspan}A=\text{Cspan}B$
כלומר כל קבוצה פורשת של $\text{Cspan}A$ היא
גם קבוצה פורשת של $\text{Cspan}B$.
בפרט וקטור $b\in\text{Span}B$ הוא צ"ל של העמודות $A^1,\dots A^n$
של A.

שאלה 6734 $\boxed{2}$: $A\in M_{m\times n}(F)$ א) יהי , $Null A = \{v\in F^n \mid A\cdot v = 0\}$

מרחב העמודות $Cspan A \subseteq F^m$ הוא תת-מרחב הנפרש ע"י העמודות של A.

$Cspan A = \{w\in F^m \mid$ קיימים $\alpha_i\in F$ כך ש: $w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A^i \}$

ב) נניח אחרת: $A\cdot B=0$ אז $A\cdot B^i=0$ ל- $1\le i\le n$ ⇐ $Cspan B\subseteq Null A$

⇐ $rank B\le \dim Null A$. מתקיים לכל מטריצה $rank A+\dim Null A=n$. מקבלים:

$rank B\le \dim Null A = n-rank A$ או:

$rank B+rank A\le n$ סתירה.

⇐ $A\cdot B\ne 0$.

ג) $A\cdot A=0$ ⇐ $A\cdot A^i=0$ לכל $1\le i\le n$. כלומר כל העמודות $A^i\in Null A$

⇐ מרחב העמודות $Span(A^1,\dots,A^n)=Cspan A\subseteq Null A$.

פתרון לשאלה $\boxed{3}$: א) נתבונן במרחב $Cspan B+Null A\subseteq F^n$

לפי נוסחת המימדים מתקיים:

$$n\ge \dim(Cspan B+Null A)=\dim Cspan B+\dim Null A-\underbrace{\dim(Cspan B\cap Null A)}_{=0}$$

⇐ $rank A = n-\dim Null A\ge \dim Cspan B = rank B$.

ב) אם $V=U\oplus W$; $\dim V=2$, $\dim U=1$ אז $\dim W=1$. כלומר W נפרש ע"י "וקטור אחד" שונה מ-0, ולהפך: כל וקטור $0\ne w\notin U$ פורש תת-מרחב $W=Span(w)$ ⇐ ש- $V=U\oplus W$ מתקיים (כי $W\not\subseteq U$ ⇐ $\dim(U+W)>\dim U=1$ ⇐ $2=\dim V\ge \dim(U+W)$ ⇐ $V=U+W$ ומנוסחת המימדים מקבלים ש $\dim U\cap W=0$)

אצלנו $\mathbb{Z}_2$ ב- V יש 4 וקטורים: 0 ו 3 וקטורים $\ne 0$. בכל אחד מ U ו W יש 2 וקטורים 0 ווקטור $\ne 0$. בקבוצה $V\setminus U$ יש $4-2=2$ וקטורים כל אחד $\ne 0$. כל אחד משני הוקטורים האלה, ביחד עם 0 הם תת-מרחב W ממימד 1 ⇐ $W\ne U$ מתקיים $V=U\oplus W$.

תשובה: 2 תתי-מרחב W.

פתרון אחר בדף נוסף.

הוכחה.

4 א) לכל $1 \le i \le m$ מתקיים $(A+B)_i = A_i + B_i \Leftarrow$

$$\Leftarrow \quad R\text{span}(A+B) \subseteq R\text{span}\,A + R\text{span}\,B$$

$$\text{rank}(A+B) = \dim R\text{span}(A+B) \le \dim(R\text{span}\,A + R\text{span}\,B) \le \dim R\text{span}\,A + \dim R\text{span}\,B = \text{rank}\,A + \text{rank}\,B$$

ב) אנחנו יודעים - $\text{Rank}\,A \ge \text{rank}\,B$ (אחרת נחליף בין A ו- B)

מסמן במטריצות $D=-B$, $C=A+B$. לפי א)

מתקיים

$$\text{rank}\,A = \text{rank}(\underbrace{C+D}_{A+B-B}) \le \text{rank}\,\underset{A+B}{\overset{\shortparallel}{C}} + \text{rank}\,\underset{-B}{\overset{\shortparallel}{D}}$$

וכן $\text{rank}\,B = \text{rank}(-B)$ (כי $C\text{span}\,B = C\text{span}(-B)$)

מקבלים

$$\text{rank}\,A \le \text{rank}(A+B) + \text{rank}\,B$$

$$\Leftarrow \quad 0 \le \text{rank}\,A - \text{rank}\,B \le \text{rank}(A+B)$$

<u>פתרון אחר</u> ל 3-ב): לפי איזומורפיזם לפי מימד, מתקיים

$V = \mathbb{Z}_2^2$. ב- $\mathbb{Z}_2^2$ יש 4 וקטורים: $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$.

לתת-מרחב U ממימד 1 יש 3 אפשרויות

$U =$	$W =$
$(0,0),(1,0)$	$\{(0,0),(0,1)\}$ או $\{(0,0),(1,1)\}$
$(0,0),(0,1)$	$\{(0,0),(1,0)\}$ או $\{(0,0),(1,1)\}$
$(0,0),(1,1)$	$\{(0,0),(1,0)\}$ או $\{(0,0),(0,1)\}$

ולכן בכל מקרה יש 2 תתי-מרחב W.