לינארית 2 - מטלה 5 - העתקות לינאריות

תאריך הגשה: $23-25.4.2018$ כל אחד בקבוצת תרגול שלו.

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. **מספר תרגיל**
2. **שם מלא**
3. **ת.ז**
4. **מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.**

תרגיל 1. יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות, נאמר שהן דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-$A=P^{-1}BP$ ונסמן $A\sim B$, הוכח שהיחס $\sim$ הוא יחס שקילות.

פתרון.

- רפלקסיביות: ניקח $P=I$ ונקבל $A=I^{-1}AI$
- סמטריות: נתון $A\sim B$ לכן קיימת P כך ש-

$$\begin{gathered}A=P^{-1}BP\\ \Downarrow\\ PAP^{-1}=B\\ \Downarrow\\ \left(P^{-1}\right)^{-1}AP^{-1}=B\\ \Downarrow\\ B=\left(P^{-1}\right)^{-1}AP^{-1}\\ \Downarrow\\ \left(Q=P^{-1}\right)\\ \Downarrow\\ B=Q^{-1}AQ\end{gathered}$$

לכן $B\sim A$

- טרנזיטיביות: נתון $A\sim B$ ו-$B\sim C$ לכן קיימות P_1,P_2 כך ש-

$$\begin{gathered}\begin{cases}A=P_1^{-1}BP_1\\ B=P_2^{-1}CP_2\end{cases}\\ \Downarrow\\ A=P_1^{-1}P_2^{-1}CP_2P_1\\ \Downarrow\\ A=\left(P_2P_1\right)^{-1}CP_2P_1\\ \Downarrow\\ \left(Q=P_2P_1\right)\\ \Downarrow\\ A=Q^{-1}CQ\end{gathered}$$

לכן $A\sim C$

תרגיל 2. כידוע יחס שקילות מחלק את הקבוצה למחלקות שקילות זרות, מצא 6 מטריצות ב-$\mathbb{R}^{2\times2}$ ממחלקות שקילות שונות במרחב. רמז: יש לעזר בתרגיל שעשינו בתרגול.

פתרון.
הוכחנו התרגול שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, לכן אם נבחר מטריצות עם פולינומים אופיינים שונים הם היו במחלקות שקילות שונות.

כידוע הפולינום האופייני של $A=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ הוא $p_A(\lambda)=\lambda(\lambda-a)$ לכן אם נבחר 6 ערכים שונים של a נקבל 6 מטריצות ממחלקות שקילות שונות למשל המטריצות

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 6 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל 3. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המקיימת

$$T\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\end{pmatrix}$$

1. מה ההעתקה עושה מבחינה גיאומטרית?
רמז: קחו את הווקטורים $\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ -1\end{pmatrix}$ וראו לאן היא שולחת אותם.

פתרון.
העתקה מקבלת ווקטורים ומסובבת אותם הזווית של $\frac{\pi}{2}$(45°)

2. על סמך הסעיף הקודם האם אתם יכולים להסיק מהם הע"ע וע"ו של העתקה?

פתרון.
ווקטורים עצמים של העתקה הם הווקטורים שלא שינו כיוון אחרי הפעלת העתקה, המקרה הזה כל ווקטור משנה כיוון (סיבוב של $\frac{\pi}{4}$), לכן נצפה שלא היו ו"ע וע"ע

3. מצאו באופן פורמלי את הע"ע והו"ע של העתקה.

פתרון.
כדי למצא ע"ע ו"ע של העתקה יש למצוא ע"ע של המטריצה מייצגת העתקה

נמצא את המטריצה המייצגת של Tעבור הבסיס הסטנדרטי

$$[T]_S^S=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$

כעת למטריצה $[T]_S^S$ נמצא את הע"ע

$$p_{[T]_S^S}(\lambda)=\left|\begin{pmatrix} \lambda-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \lambda-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}\right|=\left(\lambda-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1$$

נמצא את שורשי הפולינום בעזרת נוסחאת השורשים

$$\lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\phi$$

אכן אין ע"ע וו"ע

תרגיל 4. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המקיימת

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

1. מה ההעתקה עושה מבחינה גיאומטרית?

פתרון.

העתקה מקבלת ווקטורים ומחזירה שיקוף לציר Y

2. על סמך הסעיף הקודם האם אתם יכולים להסיק מהם הע"ע וע"ו של העתקה?

פתרון.

ווקטורים עצמים של העתקה הם הווקטורים שלא שינו כיוון אחרי הפעלת העתקה, ווקטורים אלו הם הצירים- ציר Yנשאר זהה וציר X הופך את כיוונו

3. מצאו באופן פורמלי את הע"ע והו"מ של העתקה.

פתרון.

כדי למצא ע"ע ו"ע של העתקה יש למצוא ע"ע של המטריצה מייצגת העתקה

נמצא את המטריצה המייצגת של Tעבור הבסיס הסטנדרטי

$$[T]_S^S=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת למטריצה $[T]_S^S$ נמצא את הע"ע

$$p_{[T]_S^S}(\lambda)=\left|\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)(\lambda-1)$$

לכן הע"ע הם $\lambda=\pm1$

- $\lambda=1$: המרחב העצמי הוא

$$V_{\lambda=1}=N[A-I]=N\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]=Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

זהו ציר Yכצפוי.

- $\lambda=-1$: המרחב העצמי הוא

$$V_{\lambda=1}=N[A+I]=N\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]=Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

זהו ציר Xכצפוי, וע"ע השלילי מסמן את הפיכת הכיוון.

תרגיל 5. נגדיר את המטריצה

$$J_n(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

למשל

$$J_4\left(3\right)=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

עבור המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0&0\\0&3&1&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&8&1\\0&0&0&0&8\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}J_3\left(3\right)&0\\\hline 0&J_2\left(8\right)\end{array}\right)$$

מצא את הע"ע והריבויים שלהם

פתרון.
נמצא את הפולינום האופייני של A

$$p_A\left(\lambda\right)=\left|\lambda I-A\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&0&0&0\\0&\lambda-3&-1&0&0\\0&0&\lambda-3&0&0\\0&0&0&\lambda-8&-1\\0&0&0&0&\lambda-8\end{pmatrix}\right|=\left(\lambda-3\right)^3\left(\lambda-8\right)^2$$

לכן ע"ע של המטריצה הם $3,8$

- $\lambda=3$ הריבוי האלגברי הוא 3 כדי למצא את הריבוי הגאומטי נמצא את המרחב העצמי

$$V_{\lambda=3}=N\left[A-3I\right]=N\left[\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&5&1\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}\right]=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\middle| x_2=x_3=x_4=x_5=0\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר הריבוי הגאומטרי שווה ל-1.

- $\lambda=8$ הריבוי האלגברי הוא 2 כדי למצא את הריבוי הגאומטי נמצא את המרחב העצמי

$$V_{\lambda=8}=N\left[A-8I\right]=N\left[\begin{pmatrix}-5&1&0&0&0\\0&-5&1&0&0\\0&0&-5&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right]=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\middle| x_1=x_2=x_3=x_5=0\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר גם כאן הריבוי הגאומטרי שווה ל-1.

בהצלחה!!