מבוא לאלגברה לינארית - תרגיל 7 - אלגברת מטריצות

תרגיל 1. נתונות המטריצות והסדרים שלהן $\underset{4\times5}{A},\underset{4\times5}{B},\underset{5\times2}{C},\underset{4\times2}{D},\underset{5\times4}{E}$ קבעו אילו מהביטויים הבאים מוגדרים עבור אלו שמוגדרים קבעו את הסדר של מטריצת התוצאה.

1. BA

פתרון.

$\underset{4\times5}{B}\underset{4\times5}{A}$ - מספר העמודות ב-Bשונה ממספר השורות של Aולכן הכפל אינו מוגדר.

2. $AC+D$

פתרון.

$\underset{4\times5}{A}\underset{5\times2}{C}+\underset{4\times2}{D}$ - מטריצה התוצאה של הכפל AC בעלת סדר של 4×2 ואותה מחברים עם מטריצה Dשבסדר 4×2 לכן מטריצת התוצאה בסדר 4×2

3. $AE+B$

פתרון.

$\underset{4\times5}{A}\underset{5\times4}{E}+\underset{4\times5}{B}$-מטריצה התוצאה של הכפל AE בעלת סדר של 4×4 אך אותה מחברים עם מטריצה Bשבסדר 4×5 לכן מטריצת התוצאה לא מוגדרת

4. $AB+B$

פתרון.

$\underset{4\times5}{A}\underset{4\times5}{B}+\underset{4\times5}{B}$-מטריצה התוצאה של הכפל AB לא מוגדרת כי מספר העמודות של A שונה ממספר השורות של B

5. $E(A+B)$

פתרון.

$\underset{5\times4}{E}\left(\underset{4\times5}{A}+\underset{4\times5}{B}\right)$-מטריצה התוצאה של החיבור $A+B$ בעלת סדר של 4×5 ואותה מכפילים עם מטריצה Eשבסדר 5×4 לכן מטריצת התוצאה בסדר 5×5.

6. EAC

פתרון.

$\underset{5\times 4}{E}\underset{4\times 5}{A}\underset{5\times 2}{C}$ - מטריצה התוצאה של הכפל EA בעלת סדר של 5×5 ואותה מכפילים עם מטריצה Cשבסדר 5×2 לכן מטריצת התוצאה בסדר 5×2

שאלה 2. חשבו את הביטוי $AB+2C$ עבור המטריצות הבאות

1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1\\8&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

פתרון.

$$\begin{aligned}AB+2C &= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\8&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix}2&1\\8&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}6&3\\10&5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\8&1&-1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\9&1&3\end{pmatrix}$

פתרון.

$$\begin{aligned}AB+2C &= \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\8&1&-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\9&1&3\end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix}10&2&-2\\10&2&-2\\10&2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&4\\18&2&6\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}14&4&0\\12&6&2\\28&4&4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&9\\1&4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\\-1&1\end{pmatrix}$

פתרון.

$$\begin{aligned}AB+2C &= \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&9\\1&4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&3\\1&4\\-1&1\end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix}2&9\\-1&-5\\2&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&6\\2&8\\-2&2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}6&15\\1&3\\0&11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

שאלה 3. מצאו מטריצות $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $AB\neq BA$

פתרון.
ניקח

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

ונקבל

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}$$

בעוד ש-

$$BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\0&0\end{pmatrix}$$

שאלה 4.

1. נסמן $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, מצאו חוקיות עבור A^n.

פתרון.
אם נחשב את A^2נקבל ש-

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

לכן

$$\forall m\in\mathbb{N}:\ A^{2m}=\left(A^2\right)^m=I^m=I$$

ו-

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ A^{2m+1}=\left(A^2\right)^m A=I^mA=A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

לסיכום אם n זוגי נקבל ש-$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ואם n איזוגי אז $A^n=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

2. נסמן $A=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$ (i הוא המספר המדומה והמרוכבים), מצאו חוקיות עבור A^n.

פתרון.
אם נחשב את A^4 נקבל ש-

$$A^4=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=I$$

לכן

$$\begin{cases}\forall m\in\mathbb{N}:\ A^{4m}=\left(A^4\right)^m=I^m=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\forall m\in\mathbb{N}:\ A^{4m+1}=\left(A^4\right)^m A=I^mA=A=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\\\forall m\in\mathbb{N}:\ A^{4m+2}=\left(A^4\right)^m A^2=I^mA^2=A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\\forall m\in\mathbb{N}:\ A^{4m+3}=\left(A^4\right)^m A^3=I^mA^3=A^3=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\end{cases}$$

תרגיל 5. חשב את AB בעזרת כפל שורה-עמודה, עמודה-עמודה ושורה שורה וודא שאתה מקבל אותה תשובה.

1. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0\\4&0\end{pmatrix}$

פתרון.

- שורה עמודה:

$$\begin{aligned}AB&=\\ \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\4&0\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}1(-1)+2\cdot4&1\cdot0+2\cdot0\\2(-1)+1\cdot4&2\cdot0+1\cdot0\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}7&0\\2&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- עמודה עמודה:

$$\begin{aligned}AB&=\\ \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\4&0\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}&0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}7&0\\2&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- שורה שורה

$$\begin{aligned}AB&=\\ \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\4&0\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}-1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4&0\end{pmatrix}\\2\begin{pmatrix}-1&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}4&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}7&0\\2&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. $A=\begin{pmatrix}1&1\\-3&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\end{pmatrix}$

פתרון.

- שורה עמודה:

$$\begin{aligned} AB &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot 2+1\cdot(-1) \\ -3\cdot 0+0\cdot 1 & -3\cdot 2+0\cdot(-1) \\ 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- עמודה עמודה:

$$\begin{aligned} AB &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}-1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- שורה שורה

$$\begin{aligned} AB &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \\ -3\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}+0\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תרגיל 6. ידוע ש- $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}-1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, בעזרת עובדה זאת מצאו

פתרון למערכת $\begin{cases} 2x+y+z=6 \\ x+2y+z=7 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$ רמז: חישבו על כפל עמודה עמודה.

פתרון.

$$\begin{cases} 2x+y+z=6 \\ x+2y+z=7 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן לפי נתון $x=2, y=3, z=-1$

בהצלחה!!