= השלמה להרצאה של ד"ר צבאן - 31/10/10 למ' =

טענה: יהיו $T:V\to V$ אופרטור, $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V. אזי:

$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\Longleftrightarrow$ לכל $i=1,\dots,n$ מתקיים $Tv_i=\lambda_i v_i$.

הוכחה: $(\Longrightarrow)$

$$[T]_B \overset{\text{הג'}}{=} [T]_B^B \overset{\text{הג'}}{=} \left([Tv_1]_B,\dots,[Tv_n]_B\right)=\left([\lambda_1 v_1]_B,\dots,[\lambda_n v_n]_B\right)=$$

$$\overset{\text{לינ' ההצגה}}{=}\left(\lambda_1[v_1]_B,\dots,\lambda_n[v_n]_B\right)\overset{(*)}{=}\left(\lambda_1 e_1,\dots,\lambda_n e_n\right)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}.\ \boxed{\checkmark}$$

(*) הסבר: כיון ש $B=\{v_1,\dots,v_n\}$, ולכל $i=1,\dots,n$ מתקיים

$$v_i = 0v_1+\dots+\underset{1v_i}{\cancel{0v_i}}+\dots+0v_n$$

יוצא ש $[v_i]_B=e_i$.

$(\Longleftarrow)$ מהנתון, $\left([Tv_1]_B,\dots,[Tv_n]_B\right)=[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}=\left(\lambda_1 e_1,\dots,\lambda_n e_n\right)$

לכן, לכל $i=1,\dots,n$, $[Tv_i]_B=\lambda_i e_i$, כלומר $Tv_i=0v_1+\dots+\underset{\lambda_i v_i}{\cancel{0v_i}}+\dots+0v_n = \lambda_i v_i$. //

* הדגמה של קבלת משפטים על מטריצות ממשפטים על אופרטורים, ולהיפך.

<u>דוג' א:</u> נתון: (1) לכל אופרטור לכסין $T:V\to V$, יש בסיס של V המורכב מו"ע של T.

צ"ל: (2) " מטריצה לכסינה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, — " — $\mathbb{F}^n$ — " — A.

הוכחה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה. נתבונן באופרטור $L_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ המוגדר $L_A(v):=Av$ לכל $v\in\mathbb{F}^n$.
A לכסינה, לכן יש מט' הפיכה $P=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $D=P^{-1}AP$ אלכסונית.
נתבונן בבסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ של $\mathbb{F}^n$. מתקיים $[I]_S^B=(v_1,\dots,v_n)=P$ (כאשר $S=\{e_1,\dots,e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$). (!) כמו כן, $[L_A]_S=A$ (!).
לכן, $[L_A]_B=[L_A]_B^B=[I]_B^S[L_A]_S^S[I]_S^B = P^{-1}AP=D$ אלכסונית, כלומר האופרטור L_A לכסין.

מהנתון (1), יש בסיס $E=\{u_1,\dots,u_n\}$ של $\mathbb{F}^n$, המורכב מו"ע של L_A.
אבל כל ו"ע של L_A הוא ו"ע של A: $Av=\lambda v \underset{L_A(v)=Av}{\Longleftrightarrow} L_A(v)=\lambda v$. //

דוג' ב': <u>נתון</u> (2) הנ"ל. <u>צ"ל</u>: (1) הנ"ל.

<u>הוכחה</u>: יהי $T:V\to V$ אופרטור לכסין. יהי B בסיס של V כך ש $D:=[T]_B$ אלכסונית.
בפרט, D לכסינה ולכן יש (לפי (2)) בסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ של $\mathbb{F}^n$ המורכב מו"ע של D
(במקרה טריוויאלי זה, הבסיס הוא $\{e_1,\dots,e_n\}$, אך לא נשתמש בזה.)
יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ כך ש $Dv_i=\lambda_i v_i$ לכל $i=1,\dots,n$.
לכל i, נגדיר $u_i\in V$ כך ש $[u_i]_B=v_i$. אז:

$$[Tu_i]_B=[T]_B[u_i]_B=Dv_i=\lambda_i v_i=\lambda_i[u_i]_B=[\lambda_i u_i]_B$$

ומיחח"ע ההצגה לפי B, $Tu_i=\lambda_i u_i$.
כיון ש $v_1,\dots,v_n$ בת"ל, והם שווים ל $[u_1]_B,\dots,[u_n]_B$, גם $u_1,\dots,u_n$ בת"ל
(אם תמונה של סדרת וקטורים תחת העתקה לינארית היא בת"ל, גם הוקטורים המקוריים הם בת"ל.) //

<u>תרגיל</u>: השלם, בצורה דומה לשני הדוג' לעיל, את הוכחת שקילות הכיוונים ההפוכים, כלומר הוכח את הדוג' הבאות.

דוג' ג': <u>נתון</u> (1') אם יש בסיס של V המורכב מו"ע של T, אז T לכסין.
<u>צ"ל</u> (2') אם יש בסיס של $\mathbb{F}^n$ —"— A, אז A לכסינה.

דוג' ד': <u>נתון</u> (2'). <u>צ"ל</u> (1').