

תרגיל 7

1. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm = 0$.

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

2. תהי $f \geq 0$ פונקציה מדידה לבג כך ש $\int f dm = \infty$. הראו שלכל $M > 0$ קיימת פונקציה g כך

ש $0 \leq g \leq f$ המקיימת:

i. $\int g dm > M$

ii. g חסומה

iii. לתומך של g מידה סופית.

3. תהי $\phi(x)$ פונקציה המקיימת $\phi(x) = \phi(x+1)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ובנוסף $\int_{[0,1]} \phi(x) dx < \infty$. נגדיר

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.