תרגול חזרה בפיזיקה

מתרגל: ניר שרייבר

9 ביולי 2015

מעלה על הלטך: ניר (שורץ)

על המבחן

- תיתכן שאלה מתרגילי בית 7-8 במבחן.
- אפשר להביא 15 דפים.
- המבחן הוגן, פתיר (שלום שלום המשפט על מיון של חבורות פתירות!)
- הבונוס לא על יחסות אלא דומה לשאלות הבונוס מהמאגרים והמבחנים.

שאלה 5 ממאגר התרגילים

המצבים העצמיים של חלקיק קוונטי נתונים ע"י $|\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$. אופרטור המיקום הוא x ואופרטור התנע הוא $P_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. מצב החלקיק ברגע מסוים הוא $|\psi\rangle = ie^{-\frac{|x|}{2}}$.

1. חשבו את תוחלת המקום של החלקיק $\langle x\rangle$. מהי צפיפות ההסתברות $P\left(x\leq x_0\right)$? נניח $x_0\geq 0$.
2. רשמו את $\langle p_x\rangle$.
3. הראו כי $|\psi_k\rangle$ מצב עצמי של אופרטור התנע. מהו הע"ע המתאים?

פתרון:

1.

$$\langle\psi\mid\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 2$$

$$|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{|x|}{2}}$$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(x\right)x\psi\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} -ie^{-|x|/2}xie^{-|x|/2}dx = \frac{1}{2}\int e^{-|x|}dx = 0$$

לא להתבלבל עם פונקציית הגמא [קשור לסע' ב' שכן הוכחנו תוחלת של פונקצית גל היא 0 אם...]!

$$\begin{aligned} P(x \le x_0) &= \int_{-\infty}^{x_0} |\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x_0} e^{-|x|}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{x_0} e^{-x}dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - e^{-x_0} + 1\right] = 1 - \frac{1}{2}e^{-x_0} \end{aligned}$$

ניתן לבדוק שבגבול $x_0 \to \infty$ מוביל לכך שאכן מקבלים הסתברות 1 שהחלקיק נמצא במקום מסוים במערכת.

.2

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle &= \frac{-i\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{|x|}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-|x|/2}\right)dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/2}\frac{\partial}{\partial x}e^{-|x|/2}dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x/2}\frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{x}{2}}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x/2}\frac{\partial}{\partial x}e^{-x/2}dx\right] \\ &= -i\frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx\right] = 0 \end{aligned}$$

דרך ב': נעשה את החישוב בהצגת התנע :

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \langle k \mid \psi \rangle = \int dx \langle k \mid x \rangle \langle x \mid \psi \rangle \\ 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mid x \rangle\langle x \mid = \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\langle k \mid x \rangle \cdot \psi(x)}_{\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\psi(x)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-|x|/2}dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\left(ik-\frac{1}{2}\right)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\left(ik+\frac{1}{2}\right)x}dx\right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{2}-ik} - \frac{-1}{\frac{1}{2}+ik}\right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\frac{1}{4}+k^2} \\ &= \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+4k^2} \end{aligned}$$

ננרמל את $\psi(k)$:

$$\langle \psi(k) \mid \psi(k) \rangle = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\left(1+4k^2\right)^2} = 1$$

$$
\begin{aligned}
\langle p\rangle_x &= \int \psi\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx \\
\langle p\rangle_k &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\,k\psi(x)\,dk=\frac{\pi}{4} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{k}{\left(1+4k^2\right)^2}dk=0
\end{aligned}
$$

.3

$$
\begin{aligned}
p \quad | \quad \psi_k\rangle &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right) \\
&= \hbar k\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right)=\hbar k\mid\psi_k\rangle
\end{aligned}
$$

ולכן $\hbar k$ הע"ע.

4. מה ההסתברות $P\left(p_x\leq p_0\right)$? נסמן $k_0:=\frac{p_0}{\hbar}$ ואז:

$$
P\left(p_x\leq p_0\right)=\int_{-\infty}^{k_0}\left|\psi(k)\right|^2dk=\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{k_0}\frac{dk}{\left(1+4k^2\right)^2}=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{2k_0}{1+4k_0^2}+\arctan\left(2k_0\right)+\frac{\pi}{2}\right)
$$

ושוב בגבול מקבלים 1 וזה מוכיח שאכן יש צדק בעולם והחישוב נכון!

שאלה 7 ממאגר השאלות

שתי מטוטלות בשדה כבידה g מצומדות ע"י קפיץ עם קבוע k (ראו שרטוט). במצב מנוחה, כאשר שתי הזוויות מקיימות $\theta_1=\theta_2=0$. הקפיץ רפוי באורך L.

1. רשמו את ה$\mathcal{L}$ במונחים של הקואורדינטות θ_1,θ_2. בקירוב זוויות קטנות.
2. קבלו את משוואות $Euler-Lagrange$.
3. הגדירו $w=\theta_1+\theta_2$ ו$q=\theta_2-\theta_1$ ופיתרו את המשוואות עבור w,q.
4. בזמן $t=0$ המערכת במנוחה במצב $\theta_1(0)=\theta_0,\theta_2(0)=0$. קבלו את θ_1,θ_2 כפו' של t.

[דמיינו את שרטוט הבעיה]

פתרון

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\ell^2\left(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2\right) \\
V &= V_{gravity}+V_s
\end{aligned}
$$

אגב:

$$v^2 = \underbrace{\dot{r}^2}_{=0} + r^2\dot{\theta}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$$

ובחזרה לתרגיל:

$$V_g = -mg\ell\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) \approx -2mg\ell$$

$$V_s = \frac{1}{2}k\left(\vec{x} - \vec{x_0}\right)^2$$

נזכר בכך ש:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \ell\left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right) \\ \Delta y &= \ell\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \end{aligned}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{1}{2}k\ell^2\left[\left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right)^2 + \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)^2\right] \\ &\approx \frac{k\ell^2}{2}\left(\theta_1 + \theta_2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\ell^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta_2}^2\right) - \frac{mg\ell}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right) - \frac{k\ell^2}{2}\left(\theta_1 + \theta_2\right)^2 + 2mg\ell$$

2. משוואות אוילר לגרנז':

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta_1}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta_2}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ell^2\ddot{\theta_1} = -mg\ell\theta_1 - k\ell^2\overbrace{\theta_1 + \theta_2}^{w} \\ m\ell^2\ddot{\theta_2} = -mg\ell\theta_2 - k\ell^2\overbrace{\theta_1 + \theta_2}^{w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ell^2\ddot{w} = -mg\ell w - 2k\ell^2 w \\ m\ell^2\ddot{q} = -mglq \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} &= -\frac{g}{\ell}w - \frac{2k}{m}w \\ \ddot{q} &= -\frac{g}{\ell}q \\ \frac{k}{m} &= \Omega^2 \quad \frac{g}{\ell^2} = w^2 \end{aligned}$$

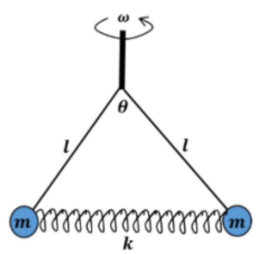
$$\begin{cases} \ddot{w} + \left(w^2 + 2\Omega^2\right)w = 0 \\ \ddot{q} + w^2 q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w &= w_0\cos\left(\sqrt{w^2 + 2\omega^2}\right)(t + \varphi_1) \\ q &= q_0\cos\left(wt + \varphi_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \theta_1(t) + \theta_2(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t\right) \\ q(t) &= -\theta_1(r) + \theta_2(t) = -\theta_0\cos(\omega t) \\ \theta_1 &= \frac{1}{2}\theta_0\left(\cos\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t - \cos\omega t\right) \\ \theta_2 &= \frac{1}{2}\theta_0\left(\cos\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t + \cos\omega t\right) \end{aligned}$$

שאלה 11 ממאגר השאלות

11. מערכת של שתי מסות מחוברות על ידי קפיץ עם קבוע k ושתי זרועות קשיחות שאורכן l כפי שמופיע בשרטוט. הזרועות חופשיות להיפתח לכל זוית θ (באופן סימטרי, דהיינו שציר ה-z הוא חוצה הזווית). אורך המנוחה של הקפיץ גם הוא l. המערכת כולה חופשית להסתובב סביב ציר z במהירות זוויתית כלשהי ω (הניחו כי אין כבידה).



א. בחרו קואורדינטות מתאימות ורשמו את הלגראנז'יאן של המערכת.
ב. קבלו את משוואות התנועה.
ג. מהו התנע הזוויתי? הראו כי הוא נשמר.
ד. עבור תנאי התחלה עם תנע זוויתי L_0, מהו הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת?
ה. חשבו את תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שווי המשקל של הפוטנציאל מן הסעיף הקודם.

$$\begin{aligned} T &= 2\frac{m}{2}\ell^2\left(\frac{\dot\theta}{2}\right)^2 + 2\frac{m}{2}\ell^2\sin^2\frac{\theta}{2}\omega^2 \\ V &= \frac{k}{2}\left(2\ell\sin\frac{\theta}{2}-\ell\right)^2 \\ \mathcal{L} &= T-V \end{aligned}$$

תזכורת:

$$T_{sphere} = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right)$$

פוטנציאל אפקטיבי:

$$m\ddot x = -V'(x)$$

$$V'(x_0) = 0$$

היכן ש-x_0 היא נקודת שיווי המשקל .

$$m\ddot x = -V'(x_0) - V''(x_0)(x-x_0)$$

$$\ddot\delta + \omega^2\delta = 0 \qquad \omega^2 = \frac{V''(x_0)}{m}$$

מועד א' 2012

מסה נקודתית m יכולה לנוע על תיל מעגלי חלק שרדיוסו R הנמצא במישור אנכי. המסה מחוברת לנקודה הגבוהה ביותר של התיל באמצעות קפיץ קל בעל קבוע קפיץ k שאורכו הרפוי L. האנרגיה הפוטנציאלית היא $\frac{1}{2}k(x-L)^2$ כאשר x אורך הקפיץ המתוח. תאוצת הכבידה היא g .

1. מצאו את $\mathcal{L}$.
2. מצאו את משוואת התנועה.
3. מצאו את נקודות שיווי המשקל.
4. מהן תדירויות התנודות הקטנות סביב נקודות שיווי המשקל היציבות?

פתרון

.1

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 \\ V &= V_g + V_s = mgR\cos\theta + \frac{k}{2}\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - L\right)^2 \\ \mathcal{L} &= T - V = \frac{m}{2}R^2\ddot{\theta}^2 + mgR\cos\theta - \frac{k}{2}\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - L\right)^2 \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{\theta} &= -mgR\sin\theta + k\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - L\right)R\sin\frac{\theta}{2} \\ m\ddot{q} &= -V'(q) \end{aligned}$$

.3 הערה:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \\ mr^2\dot{\theta} &= L_\theta \\ m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - V' \\ &= \frac{L_0^2}{mr^3} - V' \\ &= V'_{eff} \end{aligned}$$

ובחזרה לתרגיל:

$$0 = -mgR\sin\theta + kR\sin\frac{\theta}{2}\left(2R\cos\frac{\theta}{2}\right) - L$$

$$-V'(q) = 0$$

פתרון טריוויאלי: $\theta = 0$.

$$\begin{aligned} -2mg\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + k\sin\frac{\theta}{2}\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - L\right) &= 0 \\ (\theta \neq 0) \quad 2\cos\frac{\theta}{2}\left(kR - mg\right) &= kL \end{aligned}$$

$$\cos\frac{\theta_0}{2}=\frac{kL}{2\left(kR-mg\right)}=\frac{L}{2R}\cdot\frac{\omega^2}{\omega^2-\Omega^2}$$

היכן ש:

$$\omega^2=\frac{k}{m},\Omega^2=\frac{g}{R}$$

.4

$$\tilde{\omega}^2=\frac{V''\left(\theta_0\right)}{mR^2}$$

$$\begin{aligned}V'\left(\theta\right) &= mgR\sin\theta-kR^2\sin\theta+klR\sin\frac{\theta}{2}\\ V''\left(\theta\right) &= mgR\cos\theta-kR^2\cos\theta+\frac{1}{2}kLR\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}^2=\frac{V''\left(\theta_0\right)}{mR^2}=\frac{1}{mR^2}\left(\left(mgR-kR^2\right)\left(2\cos^2\frac{\theta_0}{2}-1\right)+\frac{kLR}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\right)$$

שאלה 6 מבנק השאלות

6. לחלקיק שני "מטענים" אפשריים – 0 או 1 – ולפיכך למערכת של שני חלקיקים ארבעה מצבים פוטנציאלים (אורתונורמליים): $|00\rangle,|01\rangle,|10\rangle,|11\rangle$. האנרגיה המיוחסת למצבים בהם החלקיקים מתואמים, דהיינו עם מטען זהה היא $E_{11}=E_{00}=-q$, עבור מצבים מעורבים שבהם לכל חלקיק מטען שונה $E_{01}=E_{10}=q$.

א. הניחו כי ארבעת המצבים הם בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של אופרטור האנרגיה A. כעת רשמו את A במפורש על ידי שימוש בנוטאציה של דיראק (המשפט הספקטרלי).

ב. נתונה מערכת במצב $|\psi\rangle=a_{11}|11\rangle+a_{01}|01\rangle+a_{00}|00\rangle$ מנורמל, דהיינו $\sqrt{|a_{11}|^2+|a_{01}|^2+|a_{00}|^2}=1$. מצאו את התפלגות האנרגיה $P(A=a)$ של המערכת.

ג. מהי תוחלת האנרגיה $\langle A\rangle$?

ד. נגדיר את האופרטור $B=|11\rangle\langle 00|+|00\rangle\langle 11|$. הראו כי $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle\pm|00\rangle)$ הם מצבים עצמיים של B.

ה. מהם תוצאות המדידה האפשריות ומהי ההסתברות לכל אחת מהן כאשר מפעילים את B על $|\psi\rangle$?

פתרון

.1

$$\begin{aligned}A &= \sum_i A_i\left|v_i\right\rangle\left\langle v_i\right|\\ &= -q\left(\left|00\right\rangle\left\langle 00\right|+\left|11\right\rangle\left\langle 11\right|\right)\\ &\quad +q\left(\left|01\right\rangle\left\langle 01\right|+\left\langle 10\right|\left|10\right\rangle\right)\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} P\left(A=q\right) &= \left|a_{01}\right|^{2} \\ P\left(A=-q\right) &= \left|a_{11}\right|^{2}+\left|a_{00}\right|^{2} \end{aligned}$$

.3

$$\left\langle A\right\rangle =\left\langle \psi\mid A\mid\psi\right\rangle ^{2}=\sum_{i}P\left(A=a_{i}\right)a_{i}=q\left(\left|a_{01}\right|^{2}-\left|a_{11}\right|^{2}-\left|a_{00}\right|^{2}\right)$$

.4

$$\begin{aligned} \left|x\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|11\right\rangle +\left|00\right\rangle \right) \\ \left|y\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|11\right\rangle -\left|00\right\rangle \right) \\ B\left|x\right\rangle &= \left(\left|11\right\rangle \left\langle 00\right|+\left|00\right\rangle \left\langle 11\right|\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|11\right\rangle +\left|00\right\rangle \right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|11\right\rangle +\left|00\right\rangle \right)=\left|x\right\rangle \\ B\left|y\right\rangle &= \frac{a_{00}}{\sqrt{2}}\left(\left|x\right\rangle +\left|y\right\rangle \right)+\frac{a_{11}}{\sqrt{2}}\left(\left|x\right\rangle -\left|y\right\rangle \right) \\ &= \frac{a_{00}+a_{11}}{\sqrt{2}}\left|x\right\rangle +\frac{a_{00}-a_{11}}{\sqrt{2}}\left|y\right\rangle \end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned} P\left(B=1\right) &= \frac{\left|a_{00}+a_{11}\right|^{2}}{2} \\ P\left(B=-1\right) &= \frac{\left|a_{00}-a_{11}\right|^{2}}{2} \end{aligned}$$