פתרון תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{Q}$,
2. $(0,1)$.

פתרון

סעיף א

$\Leftarrow$: תהי $x\in A'$, אזי קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A\setminus\{x\}$ כך ש-$x_n\to x$. מתקיים ש-$\{x_n\}\subseteq A$ ומכיוון ש-A היא קבוצה סגורה, היא מכילה את כל נקודות הגבול של הסדרות שמתכנסות שלה ולכן $x\in A$.

$\Rightarrow$: נתון $A'\subseteq A$. נבחר סדרה מתכנסת $\{x_n\}\subseteq A$, $x_n\to x\in X$ ונרצה להראות ש-$x\in A$. נניח בשלילה ש-$x\notin A$. אבל אז $\{x_n\}\subseteq A=A\setminus\{x\}$ ומכאן $x\in A'$. היות ו-$A'\subseteq A$ נקבל $x\in A$ בסתירה להנחה. לכן A סגורה.

סעיף ב

1. מכיון שבין כל שני מספרים ממשיים נמצא מס' רציונלי נקבל שקבוצת נק' הצטברות של $\mathbb{Q}$ היא כל $\mathbb{R}$. שכן לכל $r\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים מספר רציונלי גדול מ r וקטן מ $r+\varepsilon$.
2. נראה שאוסף נקודות ההצטברות של $(0,1)$ הוא הקבוצה $[0,1]$.

אמנם,לכל $a\in(0,1)$ הסדרה $\left\{a+\frac{1-a}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מוכלת ב $(0,1)\setminus\{a\}$ ומתכנסת ל a. מהתבוננות בגבול הסדרות $\left\{1-\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ניתן להסיק שגם הנקודות $0,1$ הינן נקודות הצטברות של $(0,1)$. לבסוף, לכל $r\in\mathbb{R}$ כך ש $1<r$ או $r<0$, r **לא** נקודת הצטברות של $(0,1)$. שכן לא ניתן לבנות סדרה ב $(0,1)$ שתתכנס ל r כזה. (ידוע מאינפי' שאם $0<x_n<1$ ו $x_n\underset{n\to\infty}{\to}a$ אזי $0\le a\le 1$).

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S \subseteq X$ תת קבוצה ו- $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. $x \in S - S'$ (הפרש קבוצות).
ב. קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x,\varepsilon) \bigcap S = \{x\}$.
ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$, אם $x_n \to x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

פתרון

א $\Leftarrow$ ב: $x \notin S'$. כלומר x אינה נקודת הצטברות של S. מכאן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \bigcap S = \varnothing$. $x \in S$ עפ"י הנתון וכמו כן $x \in B(x,\varepsilon)$. מכאן, $\{x\} \subseteq B(x,\varepsilon) \bigcap S$. נניח בשלילה שקיים $y \neq x \in B(x,\varepsilon) \bigcap S$. נקבל ש $y \in B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \bigcap S$. אך זוהי סתירה לכך ש $B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \bigcap S = \varnothing$. בסה"כ נקבל ש $B(x,\varepsilon) \bigcap S = \{x\}$ כדרוש.

ב $\Leftarrow$ ג: תהי $\{x_n\} \subseteq S$ ונניח ש $x_n \to x$. עפ"י סעיף ב' קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x,\varepsilon) \bigcap S = \{x\}$. מהגדרת הגבול קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ $x_n \in B(x,\varepsilon)$. מכיון ש $\{x_n\} \subseteq S$ נקבל שלכל $n \geq n_0$ $x_n \in B(x,\varepsilon) \bigcap S = \{x\}$. מכאן לכל $n \geq n_0$ $x_n = x$.

ג$\Leftarrow$א: נניח בשלילה ש $x \in S'$. כלומר x נקודת הצטברות של S. מכאן, קימת סדרה $\{x_n\} \subseteq S \setminus \{x\}$ כך ש $x_n \to x$. עפ"י הנתון בסעיף ג' קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ $x_n = x$, בסתירה לכך ש $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus \{x\}$.

שאלה 3

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש- A תת מרחב מטרי שלם.
ב. יהי X מ"מ ו- $A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש- A תת קבוצה סגורה של X.

פתרון

א. ניקח סדרת קושי ב- A : $\{x_n\} \subseteq A$. נרצה להראות שהסדרה מתכנסת לנקודה ב- A. כעת, $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ב- X ומכיוון ש- X שלם, קיים $x \in X$ כך ש- $x_n \to x$. בגלל ש- A סגורה היא מכילה את נקודות הגבול של הסדרות המתכנסות שלה, ולכן $x \in A$.

ב. על מנת להראות ש- A סגורה נראה שהיא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרה מתכנסת ל- $x \in X$. נרצה להראות ש- $x \in A$. אמנם, $\{x_n\}$ היא סדרה מתכנסת ולכן סדרת קושי. מכיוון ש- A שלם נקבל ש- $x_n \to y \in A$. כעת, X מרחב מטרי ולכן גבול הסדרה הוא יחיד ולכן $x = y$ ונסיק הדרוש.

<u>שאלה 4</u>

א. תהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה וחח"ע בין מרחבים מטריים, $A \subseteq X$ ו $a \in X$ נקודת הצטברות של A. הוכיחו ש $f(a)$ נקודת הצטברות של $f(A)$.

ב. מצאו דוגמא נגדית לא' כשהפונקציה רציפה אבל אינה חח"ע.

<u>פתרון</u>

א. $a \in X$ נקודת הצטברות של A לכן קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq A$ שכל איבריה שונים כך ש $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. $f : X \to Y$ רציפה ובפרט רציפה ב a ועפ"י תנאי היינה נקבל ש $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$. ברור ש $\{f(x_n)\} \subseteq f(A)$ ומכיוון ש f חח"ע כל איברי הסדרה $\{f(x_n)\}$ שונים. מכאן $f(a)$ נקודת הצטברות של $f(A)$.

ב. יהי $Y = \{0\}$ ו $A = X = \mathbb{R}$ הפונקציה $f \equiv 0$ רציפה כפונקציה קבועה. היא כמובן אינה חח"ע. מתקיים $1 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של $\mathbb{R}$ (למה?) אבל $f(1) = 0$ אינה נקודת הצטברות של Y.

<u>שאלה 5</u>

תהי $C\subseteq\mathbb{R}$ קבוצת קנטור.

א) הוכיחו ש $C=C'$.

ב) הראו שהפונקציה $f:C\to[0,1]$ המוגדרת ע"י $f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{2}\right)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}$

אינה חח"ע.

<u>פתרון</u>

א) הוכחנו בתרגול ש C סגורה ומכאן $C'\subseteq C$. נוכיח את הכלה ההפוכה.

יהי $a\in C$. נראה שקיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq C$ שכל איבריה שונים

המתכנסת ל a. לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי $x_n\in C$ מוגדר באופן הבא: הפיתוח

הטרנרי של x_n זהה לפיתוח הטרנרי של a פרט למקום ה n שם הוא

אפס אם בפיתוח של a יש 2 והוא 2 אם בפיתוח של a יש 0.

פורמאלית אם $a=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{3^m}$ אז $x_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{3^m}$ כאשר $b_m=\begin{cases}a_m & m\neq n\\ 2-a_m & m=n\end{cases}$. ברור

שאיברי הסדרה המוגדרת כולם בקבוצת קנטור וכן שכולם שונים.

מתקיים $d\left(x_n,a\right)=\frac{2}{3^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ומכאן שהסדרה מקיימת הדרוש ו a

נקודת הצטברות של C.

ב) מתקיים $\frac{2}{3}\neq\frac{1}{3}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ ו- $f\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}=f\left(\frac{2}{3}\right)$.

<u>שאלה 6</u>

א. נגדיר מטריקה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: $d(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$. הוכיחו שמטריקה זו

שקולה למטריקה הסטנדרטית מעל $\mathbb{R}$.

ב. הראו שהסדרה $\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי שאינה מתכנסת ב $(\mathbb{R},d)$ (מסעיף א').

ג. מצאו דוגמא לקבוצה X עם שתי מטריקות שקולות d,ρ כך ש (X,d) שלם ו (X,ρ) לא שלם.

<u>פתרון</u>

א. נסמן את המטריקה הסטנדרטית ב s. נראה ש $x_n \xrightarrow{s} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$.

נניח ש $x_n \xrightarrow{s} x$ הפונקציה $e^x:(\mathbb{R},s)\to(\mathbb{R},s)$ רציפה (מאינפי 1) ולכן עפ"י היינה $e^{x_n} \xrightarrow{s} e^x$ כלומר $|e^{x_n}-e^x| = s(e^{x_n},e^x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. אבל $|e^{x_n}-e^x| = d(x_n,x)$ ומכאן $x_n \xrightarrow{d} x$. נניח כעת ש $x_n \xrightarrow{d} x$. נקבל ש $d(x_n,x) = |e^{x_n}-e^x| = s(e^{x_n},e^x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ומכאן $e^{x_n} \xrightarrow{s} e^x$ כעת ניעזר ברציפות הפונקציה $\ln(x):(\mathbb{R},s)\to(\mathbb{R},s)$ עפ"י היינה כדי לקבל ש $x_n = \ln\left(e^{x_n}\right) \xrightarrow{s} \ln\left(e^x\right) = x$ כדרוש.

ב. יהי $\varepsilon>0$. קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. לכל $m>n\geq n_0$ מתקיים

$d\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right),\ln\left(\frac{1}{m}\right)\right) = \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n}-\frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ והוכחנו שהסדרה קושי.

נניח בשלילה שקיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $\ln\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d} x$. אזי עפ"י א

$\ln\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{s} x$ מרציפות $e^x:(\mathbb{R},s)\to(\mathbb{R},s)$ נקבל ש $\left\{e^{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

מתכנסת ל e^x במרחב המטרי. אבל גבול הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ במרחב המטרי $(\mathbb{R},s)$ הוא יחיד ושווה לאפס. ברור ש $e^x\neq 0$ ומכאן נקבל סתירה.

ג. $(\mathbb{R},s)$ שלם ו $(\mathbb{R},d)$ אינו שלם (סעיף ב') על אף שהמטריקות d,s שקולות (סעיף א').