פתרון אינפי 1 – תרגיל 9

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו על פי הגדרת הגבול לפי קושי שמתקיים: $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$ עבור $a>0$.

<u>פתרון</u>

יהי $\varepsilon>0$. יש למצוא $\delta>0$ כך שאם אזי $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon$. מתקיים: (*)

$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{x-a}{xa}\right|<\frac{\delta}{|xa|}$. כעת עלינו לחסום את $|xa|$. מכיוון ש- $-\delta<x-a<\delta$

מתקיים $a-\delta<x<a+\delta$. נבחר $0<\delta<\frac{a}{2}$ ונקבל ש- $\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2}$. מכיוון ש- $a>0$

גם x בתחום הזה הוא חיובי. נכפיל ב- a ונקבל: $\frac{a^2}{2}<xa$. נציב זאת ב-(*)

ונקבל: $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{x-a}{xa}\right|<\frac{\delta}{|xa|}<\frac{2\delta}{a^2}$. לכן נבחר $0<\delta<\min\left\{\frac{a}{2},\frac{\varepsilon a^2}{2}\right\}$ ונקבל הדרוש.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו על פי הגדרת הגבול לפי קושי ש- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ יש למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-1|<\delta$ אזי $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. נפתח

$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-\sqrt{x}-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|$. נרצה

להיעזר בביטוי $0<|x-1|<\delta$ ולכן נרצה שהביטוי הזה יופיע בפיתוח שבשורות הקודמות. מתקיים:

$$\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|=\left|\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|=\left|\frac{1-x}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|.$$

$$\left|\frac{1-x}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|<\frac{\delta}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

אבל $\sqrt{x}+1\geq 1$ ולכן $\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\leq\frac{1}{2}$ ולכן $\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|<\frac{\delta}{2}$. ניקח $\delta=2\varepsilon$ ונקבל הדרוש.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

תהי f המוגדרת על ידי $f=\begin{cases}1-x & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. האם קיימת נקודה a כך שקיים הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$? הוכיחו את קביעתכם.

<u>פתרון</u>

נניח שיש גבול. לכן חייב להתקיים שיש גבול לפי היינה לפי כל שתי סדרות שנבחר. כמו שעשינו בתרגול, נתבונן בסדרת רציונאלים וסדרת אי רציונאליים השואפות ל- a כלשהו, ונקבל שחייב להתקיים: $1-a=a^2$, כלומר, $a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. לכן, בכל נקודה ששונה משתי אלה, אין גבול.

כעת, על מנת להוכיח שבנקודות בהן $1-a=a^2$ יש גבול, נפעיל את השיקולים שהפעלנו בתרגול.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

נסחו הגדרות לפי קושי ולפי היינה (שתי הגדרות לכל סעיף!) לכל אחד מן הביטויים הבאים:

א. $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty$

ב. $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L\ ,\ L\in\mathbb{R}$

ג. $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=\infty\ ,\ a\in\mathbb{R}$

פתרון

Heine	Cauchy	
לכל סדרה $x_n \to \infty$ מתקיים $f(x_n) \to -\infty$	$\forall M<0\ \exists N>0\ \ \forall x$ $(x>N \to f(x)<M)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
לכל סדרה $x_n \to -\infty$ מתקיים $f(x_n) \to L$	$\forall \varepsilon>0\ \exists N<0\ \ \forall x$ $(x<N \to \lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \ \ , L\in\mathbb{R}$
לכל סדרה $a \neq x_n \to a$ מתקיים $f(x_n) \to \infty$	$\forall M>0\ \exists \varepsilon>0\ \ \forall x$ $(0<\lvert x-a\rvert<\varepsilon \to f(x)>M)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \ \ , a\in\mathbb{R}$

שאלה 5

א. הוכיחו את הטענה הבאה: יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות, ותהי $p\in\bar{\mathbb{R}}$. נניח שקיימת סביבה מנוקבת של p כך שלכל x בסביבה הזאת מתקיים $g(x)\le f(x)$. אזי, אם $\lim\limits_{x\to p} g(x)=\infty$, גם $\lim\limits_{x\to p} f(x)=\infty$.

ב. מצאו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)$.

פתרון

א. תהי $p\neq x_n\to p$. לפי הנתון מתקיים $g(x_n)\to\infty$. נתון גם ש- $\forall n\in\mathbb{N}\ g(x_n)\le f(x_n)$. לכן מטענה שהוכחנו על סדרות נובע כי $f(x_n)\to\infty$.

ב. מתקיים $x-1\le x+\sin x$. מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)=\infty$ ולכן $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$.

מש"ל

שאלה 6

מצאו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

פתרון

$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$. שימו לב, אם $x\to\infty$ אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

ב. $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>פתרון</u>

תהי סדרה $x_n\to 0$. לכן $f(x_n)=x_n\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$ ואז יש לנו סדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס ולכן לפי משפט $f(x_n)\to 0$. זה נכון לכל סדרה x_n כנ"ל ולכן לפי היינה הגבול הינו אפס.

ג. $\lim_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)$

<u>פתרון</u>

$x\to-\infty$, $\sqrt{x^2-\pi^3}\to\infty$ ולכן $x-\sqrt{x^2-\pi^3}\to-\infty$ ולכן $\lim_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)=+\infty$.

ד. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}\cdot\frac{x}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x\cdot\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

ה. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$ (רמז: השתמשו בזהות לזווית כפולה ובזהות להפרש קוסינוסים.)

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi/6+x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi/6-x}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi/6+x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi/6-x}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi/6+x}{2}\right)}=\frac{\cos(0)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}=2$$

ו. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}$

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sqrt{1-\cos x}\right)\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-(1-\cos x)}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos(\pi/2)}}=\frac{1}{2}$$

מש"ל