חשבון אינפיניטסימלי 1 (מדמ"ח) - תרגול 4

17 בנובמבר, 2019

תרגיל: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש־$a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נניח ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = L$. הוכיחו ש־$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

פתרון: ראשית נשים לב שמכך שכל איברי הסדרה הם אי־שליליים, נובע שגם הגבול L הוא אי־שלילי (תרגיל!). לכן בכלל ניתן להגדיר את $\sqrt{L}$.

יש להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$, $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \varepsilon$. נתבונן בתנאי האחרון:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\left|\frac{a_n - L}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} < \varepsilon$$

נשים לב ש:

$$\frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}}$$

ולכן התנאי $|a_n - L| < \sqrt{L}\varepsilon$ גורר את התנאי $\frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} < \varepsilon$.

אם כן, יהי $\varepsilon > 0$. מכך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = L$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - L| < \sqrt{L}\varepsilon$$

ואז לכל $n > N$ מתקיים גם $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \varepsilon$ וזה מוכיח ש־$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$ לפי הגדרת הגבול.

1 אריתמטיקה של גבולות

משפט: תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B$. אז:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

- $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=A-B$
- $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=AB$
- אם בנוסף נתון $B\neq 0$, אז $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{A}{B}$.

תרגיל: הראו שאם $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ ו־$c\in\mathbb{R}$ אז $\lim_{n\to\infty}ca_n=cA$.

פתרון: נגדיר $b_n=c$ (סדרה קבועה). ראינו בהרצאה שהיא מתכנסת: $\lim_{n\to\infty}b_n=c$. כעת נפעיל אריתמטיקה של גבולות על $\{a_n\},\{b_n\}$ ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}(ca_n)=cA$$

תרגיל: תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות ו־$A,B\in\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

1. אם $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
2. אם $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת ו־$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת.

פתרון:

1. לא נכון. ניקח למשל $a_n=(-1)^n$ ו־$b_n=1-a_n$. אז שתי הסדרות הללו לא מתכנסות (ראינו משהו דומה בתרגול הקודם). אולם, $a_n+b_n=1$ - זו סדרה קבועה ובפרט היא בוודאי מתכנסת.
2. נכון. נניח בשלילה ש־$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כן מתכנסת. אז מאריתמטיקה של גבולות, $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת כסכום של שתי סדרות מתכנסות, וזו סתירה להנחה.

הערה: אם נפעיל את הכלל לגבי מכפלה של גבולות על אותה סדרה הרבה פעמים, נקבל את הכלל הבא עבור העלאה בחזקה (טבעית):

נניח ש־$\lim_{n\to\infty}a_n=A$. אז לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n^k=A^k$.

(על מנת להוכיח את זה באופן פורמלי צריך אינדוקציה; להציג רק הסבר בעל פה)

תרגיל: מצאו את $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^7+5n^2+1}{8n^7-10n^4}$.

פתרון: נשים לב:

$$\frac{3n^7+5n^2+1}{8n^7-10n^4}=\frac{3+\frac{5}{n^5}+\frac{1}{n^7}}{8-\frac{10}{n^3}}$$

מתקיים $\frac{1}{n^5}\to 0$ (למה?) ומתרגיל קודם $\frac{5}{n^5}\to 5\cdot 0=0$. בדומה, מראים ש־$\frac{1}{n^7}\to 0$ וש־$\frac{10}{n^3}\to 0$. מאריתמטיקה של גבולות (חיבור),

$$3+\frac{5}{n^5}+\frac{1}{n^7}\to 3+0+0=3$$

וכן

$$8-\frac{10}{n^3}\to 8-0=8$$

$8\neq 0$ ולכן אפשר להשתמש שוב באריתמטיקה (חילוק) ולקבל

$$\frac{3+\frac{5}{n^5}+\frac{1}{n^7}}{8-\frac{10}{n^3}}\to\frac{3}{8}$$

תרגיל: מצאו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}(7n+1)\left(1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$$

פתרון: ניעזר בכפל בצמוד:

$$(7n+1)\left(1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)=(7n+1)\frac{\left(1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)}{\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)}=$$
$$(7n+1)\frac{1-\frac{n}{n+1}}{\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)}=(7n+1)\frac{\frac{1}{n+1}}{\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)}=$$
$$\underbrace{\frac{7n+1}{n+1}}_{(*)}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}}}_{(**)}$$

קיבלנו מכפלה של שתי סדרות. נראה שכל אחת מהן מתכנסת ונמצא את גבולה. עבור $(*)$, ננקוט בשיטה דומה לתרגיל הקודם:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{7+0}{1+0}=7$$

עבור $(**)$: נשים לב ש־$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ (שוב, מאותם שיקולים) ומהתרגיל הראשון בתרגול $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\sqrt{1}=1$. כעת, מאריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(נשים לב שהשתמשנו באריתמטיקה של גבולות עבור חילוק; זה מצריך מאיתנו לוודא שהסדרה במכנה לא מתכנסת ל־0!). סך הכל, מאריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n\to\infty}(7n+1)\left(1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)=7\cdot\frac{1}{2}=3.5$$

2 גבולות במובן הרחב

הגדרה:

- נאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאינסוף, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$.
- נאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת למינוס אינסוף, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < M$.

תרגיל: הוכיחו לפי הגדרה ש־$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = \infty$.

פתרון: צריך להראות שלכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\sqrt{\frac{n}{2}} > M$.
נשים לב:

$$\sqrt{\frac{n}{2}} > M \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{2}} > \frac{M}{2}$$

שימו לב שעכשיו **אי־אפשר להעלות בריבוע** (לא נקבל תנאי שקול), כי M עלול להיות שלילי. אפשר "לעקוף" את הבעיה הזו על ידי הפרדה למקרים לפי הסימן של M (הרי N ממילא נבחר כתלות ב־M).

- אם ידוע ש־$M < 0$, התנאי $\sqrt{\frac{n}{2}} > \frac{M}{2}$ מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן נוכל לבחור $N = 1$ ואז לכל $n > N$ נקבל $\sqrt{\frac{n}{2}} > \frac{M}{2}$.
- אם ידוע ש־$M \geq 0$, אז כן נוכל להעלות בריבוע, ונקבל:

$$\sqrt{\frac{n}{2}} > \frac{M}{2} \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{M^2}{4} \Leftrightarrow n > \frac{M^2}{2}$$

ואז נוכל לבחור $N = \left\lceil \frac{M^2}{2} \right\rceil$ ולכל $n > N$ נקבל $n > \frac{M^2}{2}$ ובפרט $\sqrt{\frac{n}{2}} > \frac{M}{2}$.

זה מוכיח ש־$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = \infty$ לפי הגדרת הגבול במובן הרחב.

טענה (כלל ההשוואה): תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו שאם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אז גם $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

הוכחה: תרגיל לבית.

תרגיל: יהי $\delta > 0$. הוכיחו ש־$\lim_{n\to\infty}(1+\delta)^n = \infty$.

פתרון: נשתמש בבינום של ניוטון (שראינו בתרגול הראשון):

$$(1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k$$

נסיר את כל המחוברים פרט לשניים הראשונים. מכיוון שכל המחוברים אי־שליליים, נקבל:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\delta^k \geq \binom{n}{0}\delta^0 + \binom{n}{1}\delta^1 = 1\cdot 1 + n\cdot\delta = 1+\delta n$$

הוכחנו ש־$1+\delta n \geq (1+\delta)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. כעת, קל לראות ש־$\lim_{n\to\infty}(1+\delta n)=\infty$ ומכלל ההשוואה, $\lim_{n\to\infty}(1+\delta)^n=\infty$.

תרגיל: תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו־$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע. הוכיחו ש־

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$$

פתרון: צריך להראות שלכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n+b_n>M$.

יהי K חסם מלרע של b_n. משמע, $b_n\geq K$ לכל n. לכן:

$$a_n+b_n\geq a_n+K$$

מכאן שהתנאי $a_n+K>M$ גורר את התנאי $a_n+b_n>M$.

אם כן, יהי $M\in\mathbb{R}$. מכך ש־$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, נובע שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>M-K$. לכן $a_n+K>M$ ואז $a_n+b_n>M$ וזה מוכיח ש־$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$ לפי הגדרה.