הבוחן לא יתקיים בתאריך המתוכנן בגלל יום הסטודנט. תקבלו הודעה על התאריך החדש (כנראה שידחה בשבוע)

החומר- עד הרצאה 8, כולל. כלומר, ההרצאה שהייתה ביום ראשון האחרון.

תזכורת: בשיעור הקודם הוכחנו את הטענה הבאה: אם קבוצה A היא קשירה, אז $cl(A)$ קשיר. הניסוח שאמרנו הוא: אם A צפופה בX, וA קשירה אז X קשיר. שימו לב שזה ניסוח שקול. (כי כל קבוצה צפופה בסגור).

שאלה מקבילה: אם A קשירה, האם $int(A)$ קשיר?

פתרון: הפרכה. דוגמא נגדית: ב$\mathbb{R}^2$ נסתכל על מעגל היחידה פחות הקטע $[-1,1]$, ואז להחזיר את $(0,0)$. זאת קבוצה קשירה. אבל הפנים שלה זה שני חצאי המעגל בלי השפה, ובלי הנקודה $(0,0)$, שזאת לא קבוצה קשירה.

תזכורת: מרחב נקרא "בלתי קשור לחלוטין" אם רכיבי הקשירות בו הם נקדונים. (למשל: הישר של סורגנפריי, שזה $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה שמתקבלת ע"י איחודים של קטעים $[a,b)$)

תרגיל: תהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה כאשר X קשיר וY בלתי קשיר לחלוטין. הוכיחו שf קבועה.

פתרון: הוכחתם בהרצאה שתמונה רציפה של קבוצה קשירה היא קבוצה קשירה. לכן $f[X]$ היא תת קבוצה קשירה של Y. אבל הקבוצות הקשירות היחידות בY הם הנקודונים. כלומר, $f[X]$ היא נקודון. שזה אומר שf היא פונקציה קבועה.

תזכורת: יהי X מרחב טופולוגי. רכיה קשירות היא תת קבוצה קשירה מקסימלית. כלומר, A הוא רכיב קשירות של X אם A היא קבוצה קשירה, ולכל $A \subsetneq B$, B לא קשירה. ראיתם בהרצאה שניתן להגדיר רכיבי קשירות בתור מחלקות שקילות כאשר יחס השקילות הוא $x \sim y$ אם קיימת קבוצה קשירה שמכילה את שניהם.

בשביל להוכיח שזה יחס שקילות ראיתם את משפט אלומות שאומר שאם יש קבוצות קשירות שנחתכות כולן, אז האיחוד שלהם קשיר.

תרגיל: רכיבי קשירות הם קבוצות סגורות.

הוכחה: יהי A רכיב קשירות. זה אומר שA קשיר ושA לא מוכל ממש בשום קבוצה קשירה. אבל $A \subseteq cl(A)$. והוכחנו שאם A קשירה אז $cl(A)$ קשיר. לכן בהכרח מתקיים ש$A = cl(A)$, כלומר, A סגורה.

תרגיל: יהיו A, B קבוצות קשירות. נניח ש$A \cap cl(B) \neq \emptyset$. הוכיחו ש$A \cup B$ קשירה.

פתרון: נסתכל על $A \cup B$ בתור המרחב החדש שלנו. בשביל להוכיח שהוא מרחב קשיר מספיק להוכיח שיש לו רכיב קשירות אחד, כלומר, שכל הנקודות נמצאות באותו רכיב קשירות.

נתון שA וB קשירות. אז כל שתי נקודות בA הן באותו רכיב קשירות, וכל שתי נקודות בB הן באותו רכיב קשירות. B קשירה, ולכן $cl(B)$ קשיר, לכן כל נקודה בB וב$cl(B)$ הן באותו רכיב קשירות (כי B מוכל ב$cl(B)$). תהי $x \in A \cap cl(B)$ ו$a \in A$ ו$b \in B$. a וx באותו רכיב קשירות, כי שתיהן בA. וb וx באותו רכיב קשירות כי שתיהן ב$cl(B)$. ואנחנו יודעים שזה יחס שקילות, כלומר טרנזיטיבי, לכן a וb באותו רכיב קשירות.

הוכחה נוספת: אנחנו רוצים ש$A \cup B$ קשירה. נניח בשלילה ש$A \cup B = U \cup V$ איחוד זר של שתי קבוצות סגוחות לא ריקות ב$A \cup B$. לא ייתכן שU וV שתיהן נחתכות עם A כי אז $A \cap U, A \cap V$ היה פירוק לא טריוויאלי של A. כנ"ל לגבי B. בה"כ $A \subseteq U, B \subseteq V$. V היא קבוצה סגורה שמכילה את B אז היא מכילה את $cl(B)$. אבל יש חיתוך בין $cl(B)$ לA. אז יש חיתוך בין V לU- סתירה.

בסיסים

הגדרה: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. בסיס לτ זה אוסף של קבוצות פתוחות, כך שכל קבוצה בτ היא איחוד של קבוצות מהאוסף הנ"ל.

למשל:

1. בטופולוגיה הדיסקרטית- הנקודונים מהווים בסיס.
2. בטופולוגיה מטרזיבילית, $B(x,r)$ מהווים בסיס. כל קבוצה פתוחה היא איחוד של כדורים.

באופן כללי, אם B הוא בסיס לטופולוגיה, אז הרבה מהתכונות הטופולוגיות, מספיק לבדוק שהן מתקיימות רק על קבוצות מהבסיס.

תרגיל: יהא (X,τ) מ"ט ו B_τ בסיס. אזי A קבוצה צפופה אמ"מ היא נחתכת באופן לא ריק עם כל קבוצה פתוחה בסיסית (=קבוצה מהבסיס).

הוכחה: $\Leftarrow$ טריוויאלי.

$\Rightarrow$ תהי A קבוצה שנחתכת עם כל קבוצה מהבסיס. תהי O פתוחה לא ריקה כלשהי. אז O היא איחוד של קבוצות מB_τ. ולכן היא מכילה קבוצה לא ריקה מB_τ. אז מכיוון שA נחתכת עם כל קבוצה מB_τ, A נחתכת גם עם O.

תרגיל: תהי $f: X \to Y$ פונקציה. וB בסיס לטופולוגיה על Y. הוכיחו שf רציפה אמ"ם לכל קבוצה פתוחה בסיסית, התמונה ההפוכה שלה פתוחה.

הוכחה: $\Leftarrow$ טריוויאלי.

$\Rightarrow$ תהי O קבוצה פתוחה בY. זה אומר ש$O = \bigcup_{U_i \in B} U_i$.

$$f^{-1}(O) = \bigcup f^{-1}(U_i)$$

לכל קבוצה בB אנחנו יודעים שהתמונה ההפוכה שלה פתוחה בX, ואיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות בX הוא פתוח בX, לכן $f^{-1}(O)$ פתוחה. כלומר, f רציפה.

תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי וB בסיס. הוכיחו שX הוא T_2 אמ"ם לכל שתי נקודות יש קבוצות פתוחות בסיסיות שמפרידות בינהן.

הוכחה: $\Rightarrow$ טריוויאלי.

$\Leftarrow$ נניח שX הוא T_2. $x \neq y$. $x \in O, y \in V$ $O \cap V = \emptyset$ פתוחות. כל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות פתוחות בסיסיות. לכן יש קבוצה $U_x \in B$ כך ש$x \in U_x \subseteq O$. ויש קבוצה $y \in U_y \subseteq V$ והן פתוחות בסיסיות. מכיוון שO וV זרות, אז גם U_x וU_y זרות.

הגדרה: מרחב נקרא "בעל תכונת מנייה שניה", מסמנים בB_2. אם יש לו בסיס בן מניה.

דוגמאות:

1. הטופולוגיה הדיסקרטית על מרחב בן מניה, אז הנקודונים יהיו בסיס בן מניה.
2. על $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית, אפשר לקחת $B(q,r)$ כאשר $q,r \in \mathbb{Q}$.

דוגמאות נגדיות: הטופולוגיה הדיסקרטית על מרחב שהוא לא בן מניה לא יכולה להיות B_2, כי כל נקודון הוא פתוח, ולא ניתן לכתוב נקודון כאיחוד של קבוצות אחרות אז כל בסיס חייב להכיל את כל הנקודונים, ויש מספר לא בן מניה של כאלה.

תרגיל: האם הטופולוגיה הקוסופית היא B_2?

פתרון: אם X היא קבוצה בת מניה יש לה מספר בן מניה של קבוצות סופית (איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה).

הקבוצות הסגורות= קבוצות סופיות (וX עצמו). יש התאמה חח"ע בין הקבוצות הפתוחות לסגורות ע"י שליחת כל קבוצה למשלים שלה. לכן יש מספר בן מניה של קבוצות פתוחות. לכן המרחב הוא B_2, אפשר לקחת בתור בסיס את כל הקבוצות הפתוחות.

אם X היא לא בת מניה: נניח שיש בסיס בן מניה כלשהו B. כל קבוצה בבסיס היא פתוחה ולכן המשלים שלה סופי. אז יש מספר בן מניה של קבוצות, שלכל אחת משלים סופי, אז האיחוד של המשלימים הוא בן מניה. X הוא לא בן מניה, אז אפשר למצוא $x \in X$ שנמצא בכל הקבוצות בבסיס. ולכן הוא נמצא בכל הקבוצות הפתוחות. אבל $\{x\}^c$ היא קבוצה פתוחה שx לא נמצא בה, בסתירה.

לכן במקרה שX היא קבוצה שאינה בת מניה, הטופולוגיה הקוסופית עליה היא לא B_2.

תזכורת: מרחב נקרא ספריבילי אם יש לו תת קבוצה צפופה בת מניה.

תרגיל: הוכיחו שB_2 גורר ספרביליות

פתרון: קיים בסיס בן מניה $B = \{O_n\}$. לכל O_n נבחר $x_n \in O_n$. $A = \{x_n\}$ היא קבוצה בת מניה. היא צפופה כי מהגדרה היא נחתכת עם כל קבוצה מהבסיס. והוכחנו שזה גורר צפיפות.

תרגיל: תנו דוגמא למרחב ספרבילי שהוא לא B_2.

פתרון: X שאינו בן מניה עם הטופולוגיה הקוסופית הוא לא B_2. הוא כן ספרבילי כי הוכחנו שבטופולוגיה הקונסופית כל תת קבוצה אינסופית היא צפופה.