10.08.10

בוחן אמצע – לינארית 1

שם מלא:____________________ ת.ז.:______________________ מתרגל: ___________

משך הבוחן – 45 דקות

חומר עזר אסור לשימוש

את התשובות יש לכתוב על דף השאלה

יש לענות **תשובות מנומקות** על **3** מתוך 4 השאלות הבאות (34 נקודות לכל שאלה):

1. תהי מערכת משוואות לינארית ממשית המיוצגת על ידי המטריצה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 0 & a \\ 0 & a & 5 & 5 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$$

a. עבור אילו ערכים של a יש למערכת פתרון?

פתרון:

עבור $a \neq 0,2$ המטריצה מדורגת עם איבר פותח בכל עמודה – כלומר אין משתנים חופשיים. בנוסף אין שורת סתירה. לכן יש פתרון יחיד

b. עבור אילו ערכים של a אין למערכת פתרון?

פתרון:

עבור $a = 2$ השורה האחרונה היא שורת סתירה ולכן אין פתרון. עבור $a = 0$ מקבלים לאחר דירוג שורת סתירה ושוב אין פתרון

c. עבור אילו ערכים של a יש למערכת יותר מפתרון אחד?

תשובה:

אין ערכים של a עבורם למערכת יהיה יותר מפתרון אחד.

2. יהי F שדה, ויהיו $a,b \in F$. נסמן את האיבר הנייטרלי לחיבור ב $0_F \in F$

(**שימו לב**: יש לנמק היטב - במיוחד בשאלה זו)

a. הוכח ש $0_F \cdot a = 0_F$

הוכחה:

$0_F a = (0_F + 0_F)a$ (איבר נייטרלי לחיבור)

$(0_F + 0_F)a = 0_F a + 0_F a$ (דיסטריביוטיביות)

ביחד מקבלים

$0_F a = 0_F a + 0_F a$

$0_F a + \left(-0_F a\right) = 0_F a + 0_F a + \left(-0_F a\right)$ (מוסיפים לשני צידי המשוואה את האיבר הנגדי של $0_F a$

- לכל איבר בשדה יש איבר נגדי, ומתוך סגירות הכפל $0_F a$ שייך לשדה)

$0_F = 0_F a + 0_F$ (איבר ועוד הנגדי שלו שווה לאפס)

$0_F = 0_F a$ (כי אפס נייטרלי לחיבור)

b.   נניח ש $a,b\neq 0_F$. הוכח ש $c=a\cdot b$ הפיך וש $c^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

הוכחה:

$a,b\neq 0$ בשדה לכן יש להם הופכיים a^{-1},b^{-1} . נכפול

$c\left(a^{-1}b^{-1}\right)=aba^{-1}b^{-1}=abb^{-1}a^{-1}=a1_F\,a^{-1}=aa^{-1}=1_F$ (השתמשנו בחילופיות הכפל בשדה,

ובתכונות של איבר הופכי ושל האיבר הנייטרלי לכפל). לכן לפי הגדרת ההופכי $c^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

3.

a.   ב $\mathbb{Z}_{13}$ מצא את $\left(\bar{3}\right)^{-1},\left(\bar{4}\right)^{-1}$

פתרון:

$\bar{3}\cdot\bar{9}=27\bmod 13=\bar{1}$ לכן $\left(\bar{3}\right)^{-1}=\bar{9}$

$\bar{4}\cdot\overline{10}=40\bmod 13=\bar{1}$ לכן $\left(\bar{4}\right)^{-1}=\overline{10}$

b.   יהי $z\in\mathbb{C}$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. חשב את z^{4446}

פתרון:

$r=\sqrt{|z|}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$. הזווית של $1+i$ היא בדיוק 45 מעלות כלומר $\frac{\pi}{4}$.

לכן $z=cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$. לפי משפט דה מואבר

$$z^{4446}=cis\left(4446\frac{\pi}{4}\right)=cis\left(4440\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4}\right)=cis\left(555\cdot 2\pi+\frac{6\pi}{4}\right)=cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$$

4. תהי $A \in F^{n\times m}$ מטריצה המקיימת $AA^t = A^t A$. **הוכח/הפרך:** A סימטרית

הפרכה:

ניקח A אנטי סימטרית כלשהי. אזי היא מקיימת $A=-A^t$ לפי הגדרה. לכן היא מקיימת $AA^t = A^t A = -A^2$. מספיק לתת דוגמא אחת למטריצה כזו שאינה סימטרית על מנת להפריך את הטענה ש A סימטרית. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ אנטי סימטרית ולכן מקיימת את נתוני השאלה, אך היא אינה סימטרית.