

אלגברה ליניארית 2 – תרגיל מס' 6

1. א. תהיינה $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. הראה כי A_1 ו- A_2 נילפוטנטיות אך $A_1 + A_2$ ו- $A_1 \cdot A_2$ אינן נילפוטנטיות.

ב. תהיינה A_1 ו- A_2 מטריצות ריבועיות מתחלפות ($AB = BA$). הוכח כי אם A_1 ו- A_2 נילפוטנטיות, אז גם $A_1 + A_2$ ו- $A_1 \cdot A_2$ נילפוטנטיות.

ג. תהי T טרנספורמציה ליניארית, ויהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ סקלרים כלשהם ב- F . נגדיר את הטרנספורמציה: $S = \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots + \alpha_n T^n$. הוכח כי אם T נילפוטנטית מאינדקס r , אז גם S נילפוטנטית, ואינדקס הנילפוטנטיות שלה קטן או שווה ל- r .

2. א. תהי T טרנספורמציה ליניארית (או מטריצה) נילפוטנטית מאינדקס k . הוכח כי הפולינום המינימלי של T הוא t^k .

ב. תהי T טרנספורמציה ליניארית (או מטריצה) נילפוטנטית. הוכח כי ל- T ערך עצמי יחיד $\lambda = 0$.

ג. הוכח כי טרנספורמציה ליניארית T היא נילפוטנטית מאינדקס k אם ורק אם המטריצה שלה $[T]$ היא נילפוטנטית מאינדקס k .

ד. תהיינה A_1 ו- A_2 מטריצות דומות. הוכח כי אם A_1 נילפוטנטית מאינדקס k , אז גם A_2 היא כזאת.

3. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות, חשב את צורת גיורדן שלה:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. א. מצא את כל צורות הגיורדן האפשריות עבור טרנספורמציות ליניאריות $T: V \rightarrow V$ המקיימות $T^3 \neq 0$, $T^4 = 0$ אם נתון כי $\dim V = 6$.

ב. מצא את כל צורות הגיורדן האפשריות עבור מטריצות שהפולינום האופייני שלהן הוא $P(t) = t^5$.

5. נתונה מטריצה A מסדר 6, המקיימת את השוויון $A^5 = 0$ אך $A^4 \neq 0$.

מהי הדרגה של A ? (מצא את צורת גיורדן של A).

6. תהי M מטריצה ריבועית. הוכח כי $M^2 = 0$ אם ורק אם קיימות שתי מטריצות ריבועיות A ו- B כך ש- $M=AB$ ו- $BA=0$ (הדרכה: הוכח זאת תחילה עבור צורת גיורדן של M).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{7. תהי:}$$

הראה כי A נילפוטנטית, ומצא את צורת גיורדן שלה.

בהצלחה!