88-112-תירגול 11-12:

תמורות:

תמורה: תהא X קב' סופית. תמורה σ על X היא פונקציה חח"ע ועל מ-X לעצמה. את אוסף התמורות מסמנים S_X או S_n עבור $|X|=n$ וניתן להראות ביתר קלות כי $|S_n|=n!$

$$\begin{pmatrix} 1 & \to & n-options \\ 2 & \to & n-1-options \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \to & one \quad option \end{pmatrix}.$$

צורת כתיבה: $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

לדוגמא: אם $1\mapsto 2, 2\mapsto 1, 3\mapsto 3$ אז: $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

סוגי תמורות:

מחזור: היא תמורה הפועלת על תת קבוצת אייברים ב-X באופן מעגלי ואיננה מזיזה את היתר, ניתן לכתוב אותה כ- $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ כאשר $a_1\mapsto a_2\mapsto\ldots\mapsto a_k\mapsto a_1$. דוגמא:

את $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ממקודם ניתן לכתוב כ- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

חילוף: הוא מחזור של שני אייברים בלבד.

הרכבת תמורות: כמקרה פרטי של פונקציה נגדיר הרכבת תמורות ע"י $\tau\circ\sigma(i)=\tau(\sigma(i))$

לדוגמא: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

פרוק תמורה למחזורים זרים ולחילופים:

במבט על תמורה $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ניתן לפרק את הקב' X לתתי קבוצות זרות ע"י המחזורים הפועלים ב σ (שימו לב שסדר ההרכבה בפרוק זה ניתן להחלפה) וכמו כן ניתן להגדיר את σ כרצף של חילופים (לא בהכרח זרים).

דוגמא: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

הערה: בכתיבה המחזורית נהוג להשמיט את המחזורים מאורך 1.

<u>תמורת הזהות:</u> היא התמורה

$$Id \in S_n : \forall a_i \in X \qquad a_i \mapsto a_i \Rightarrow Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1)(2)\cdots(n)$$

<u>תמורה הפוכה:</u> לתמורה כלשהי σ היא התמורה $\tau = \sigma^{-1}$ כך ש- $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = Id$

דוגמא: $\sigma = (1 \quad 2 \quad 3) \in S_4$ מצא $\tau = \sigma^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

בפועל, על מנת למצוא את האיבר ההופכי של מחזור כלשהו, יש להפוך את סדר האיברים במחזור.
כך למשל, ההופכי של (1432) הוא (2341)

<u>ע"מ 68, 1.6א:</u>

יהי V מ"ו עם בסיס סדור $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. עבור תמורה $\sigma \in S_n$ נסמן

$B_\sigma = \{v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\}$. יהי $v \in V$. הוכח

$$[v]_B = (\alpha_1, \quad \ldots \quad, \alpha_n) \Leftrightarrow [v]_{B\sigma} = (\alpha_{\sigma(1)}, \quad \ldots \quad, \alpha_{\sigma(n)})$$

פתרון:

ראשית נשים לב כי מהעובדה שתמורה היא פונקציה חח"ע ועל מ-V לעצמה נובע כי:

$$\forall j = 1, \ldots, n \quad \exists! i = 1, \ldots, n : \sigma(i) = j$$

לכן:

$$[v]_B = (\alpha_1, \quad \ldots \quad, \alpha_n) \Leftrightarrow v = \sum \alpha_j v_j \Leftrightarrow v = \sum \alpha_{\sigma(i)} v_{\sigma(i)} \Leftrightarrow [v]_{B\sigma} = (\alpha_{\sigma(1)}, \quad \ldots \quad, \alpha_{\sigma(n)})$$

<u>ע"מ 68, 1.9 (לא חובה, בהתאם לזמן):</u>

תהא $\sigma \in S_n$. נגדיר העתקה $T_\sigma : F^n \to F^n$ ע"י $T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$

א. הוכח T_σ ה"ל

ב. מצא $[T_\sigma]$

פתרון:

א.

$$T_\sigma((x_1, \ldots, x_n) + k(y_1, \ldots, y_n)) \underset{z_i = x_i + ky_i}{=} T_\sigma(z_1, \ldots, z_n) =$$

$$(z_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(n)}) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}) + k(y_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, y_{\sigma^{-1}(n)}) =$$

$$T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) + kT_\sigma(y_1, \ldots, y_n)$$

ב. $\begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma^{-1}1} & \cdots & e_{\sigma^{-1}n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \cdots & T(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix} = [T_\sigma]$ כלומר מטריצה המורכבת מחילופי שורה בלבד ביחס למטריצת היחידה.

היפוך סדר: בתמורה הוא זוג $i,j \in \{1...,n\}$ כך ש $i<j$ וגם $\sigma(i) > \sigma(j)$.

סימן של תמורה: $sign\sigma = (-1)^{n(\sigma)}$ $\quad \forall \sigma \in S_n$ כאשר $n(\sigma)$ הוא מס' היפוכי סדר ב- σ.

זוגיות של תמורה: תמורה σ היא זוגית אמ"מ הסימן שלה הוא 1 ולכן אי זוגית אמ"מ הסימן שלה הוא 1-.

שיטה נוספת לגילוי הסימן/זוגיות: נרשום את התמורה כפרוק לחילופים ונקבע את זוגיותה בהתאם לזוגיות מס' החילופים. (שימו לב, קל יותר קודם לפרק למחזורים זרים ואז לחילופים).

דוגמא: $sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = sign(1 \quad 2)(3 \quad 5 \quad 4) = (1 \quad 2)(4 \quad 5)(3 \quad 4) \Rightarrow$ א"ז

תכונות חשובות:

1. סימן של מחזור מאורך k הוא $(-1)^{k-1}$.
2. סימן של תמורה הוא מכפלת סימני מחזוריה הזרים.
3. סימן של הרכבת תמורות הוא מכפלת סימני מרכיביה.

דטרמיננטות:

תהי $A \in F^{nxn}$. כל תמורה $\sigma \in S_n$ היא בחירת n מקומות ב-A: $a_{1,\sigma(1)},...,a_{n,\sigma(n)}$ (כלומר רכיב בודד לכל שורה ועמודה).

לדוגמא: $A = \begin{pmatrix} \underline{\underline{a_{11}}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \underline{\underline{a_{23}}} \\ a_{31} & \underline{\underline{a_{32}}} & a_{33} \end{pmatrix} \Leftarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

דטרמיננטה: $A \in F^{nxn}$. אזי: $\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

דוגמא:

1. $A = (a_{ij}) \in F^{2x2}$. ראשית נבין מי הם איברי S_2 וסימניהם:

$$\begin{array}{cc} S_2 = \{Id, & (1 \quad 2)\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{זוגית} & \text{א"ז} \end{array}$$

ולכן: $|A| = \sum_{\sigma \in S_2} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2. $A=(a_{ij})\in F^{3x3}$. ראשית נבין מי הם איברי S_3 וסימניהם:

$$\begin{array}{cccccc} S_3=\{Id, & (1\ \ 2), & (1\ \ 3), & (2\ \ 3), & (1\ \ 2\ \ 3), & (1\ \ 3\ \ 2)\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{זוגית} & \text{א"ז} & \text{א"ז} & \text{א"ז} & \text{זוגית} & \text{זוגית} \end{array}$$

ולכן:

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_2} sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

נשים לב ש-

$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{32}=$$
$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{13}(-a_{22}a_{31}+a_{21}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32})=$$
$$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

ודטרמיננטות 2x2 אנו יודעים לחשב ביתר קלות.

<u>מסקנה: פיתוח דטרמיננטות לפי מינורים.</u>

$A\in F^{nxn}$. המינור ה-ij של A הוא התת מטריצה M_{ij} מגודל $(n-1)x(n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j ב-A.

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow M_{22}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{pmatrix}$$

<u>הגדרת הדטרמיננטה בפיתוח לפי שורה/עמודה:</u>

פיתוח לפי השורה ה-i :

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$$

פיתוח לפי העמודה ה-j :

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$$

זוהי בניה רקורסיבית עם הבסיס 2x2: $\begin{vmatrix}a_{ij} & a_{il}\\ a_{kj} & a_{kl}\end{vmatrix}=a_{ij}a_{kl}-a_{il}a_{kj}$.

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&4\\0&8&-1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&4\\8&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}3&4\\0&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}3&1\\0&8\end{vmatrix}=-1-32-0(-3+0)+2(24-0)=15$$

<u>מסקנה</u>: יהיה הכי קל לפתח לפי שורה/עמודה בעלת הכי הרבה אפסים.

<u>משפט</u>: המטריצה A הפיכה אמ"מ הדטרמיננטה שלה מתאפסת.

<u>ע"מ 70, 2.6:</u>

בדוק איזו מהמטריצות הבאות הפיכה כאשר $a,b\in R$:

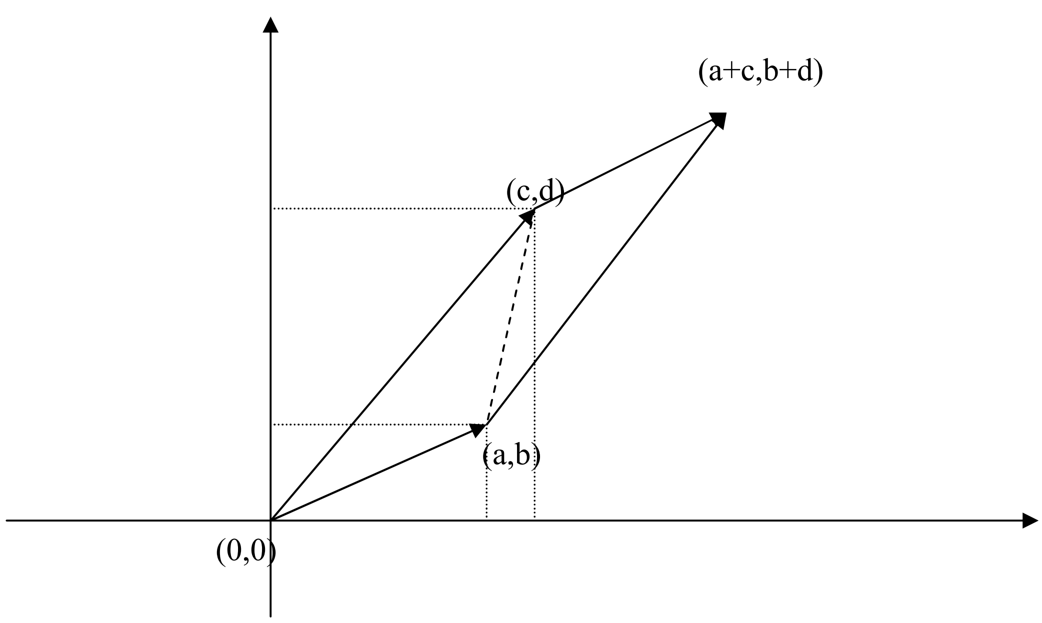
$$|A|=\left|\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix}\right|=ab-ba=0\Rightarrow \text{לא}$$

$$|B|=\left|\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\right|=a^2+b^2$$

אז B תהיה הפיכה כאשר a או b שונות מאפס.

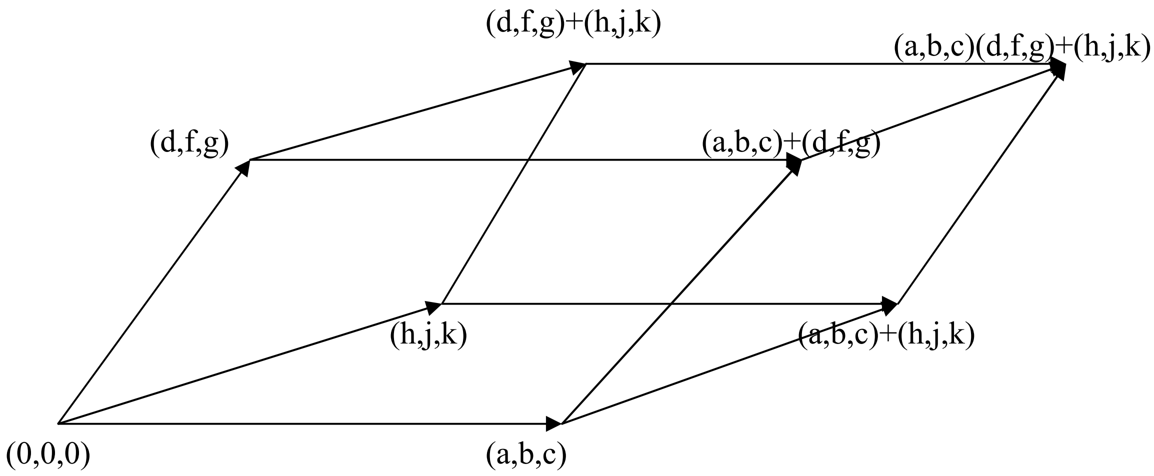
<u>ע"מ 70, 2.8:</u>

איך מחשבים שטח של מקבילית במישור בעזרת דטרמיננטות?



$$S=2\cdot\left(\frac{cd}{2}-\frac{ab}{2}-\frac{(b+d)(c-a)}{2}\right)=ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\rightarrow$$ הוקטורים הבונים של המקבילית

באותו אופן:



$$S=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ h & j & k \end{vmatrix}$$

<u>תכונות חשובות:</u>

1. אם ב-A שורת/עמודת אפסים אז det(A)=0
2. אם A משולשית (ובפרט אלכסונית) אז $\det(A)=\prod a_{ii}$
3. אם A מטריצת בלוקים משולשית אז $\det(A)=\prod A_{ii}$ (כמובן ש A_{ij} הם הבלוקים).
4. דטרמיננטה היא פונקציה כיפלית $|AB|=|A||B|$, בפרט חזקתית $|A^m|=|A|^m$ ובפרט (אם המטריצה הפיכה) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.
5. חשוב לציין שפעולות שורה/עמודה משפיעות על הדטרמיננטה, כלומר למטריצות שקולות שורה לאו דווקא תהיה אותה הדטרמיננטה!

   אם נסמן את המטריצות האלמנטריות $E_{i,j},E_{\alpha\cdot i},E_{i+\alpha\cdot j}$ כפי שעשינו בעבר אז:

   $$|E_{i,j}A|=-|A|$$
   $$|E_{\alpha\cdot j}A|=\alpha|A|$$
   $$|E_{i+\alpha\cdot j}A|=|A|$$
6. כתוצאה מ-5: $|\alpha A|=\alpha^n|A|$

7. $|A| = |A^t|$

<u>דוגמאות:</u>

1.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)$$

2.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -14 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 14 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\cdot 1\cdot 1\cdot(-3)$$

3. יהיו B,A מטריצות כך שידוע $|A| = 2$. חשב $|B^{-1}AB|, \left|(B^{-1}AB)^9\right|, \left|(A^{-1})^t\right|$.

$$|B^{-1}AB| = |B^{-1}||A||B| = |B|^{-1}|A||B| = |A|,$$

$$\left|(B^{-1}AB)^9\right| = |B^{-1}AB|^9 = (|B^{-1}||A||B|)^9 = |A|^9,$$

$$\left|(A^{-1})^t\right| = |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

<u>ע"מ 72,2.15:</u>

א. הוכח את תכונה 6

ב. הוכח לכל A מעל C עם דט' שונה מאפס קיים c ב-C כך ש- $|cA| = 1$

פתרון:

א. לא רצוי לבזבז על זה הרבה זמן, זה נובע מהתכונה השניה ב-5 שחוזרת n פעמים, פעם לכל שורה.

ב. $\overset{\text{נגדיר}}{c = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}}$ $\quad |A| = b \Rightarrow \frac{1}{b}|A| = 1 \Rightarrow \left|\sqrt[n]{\frac{1}{b}}A\right| = 1 \Rightarrow$

$\downarrow$

תמיד קיים לפי המשפט היסודי של האלגברה

<u>ע"מ 75, 4.3:</u>

$A \in R^{nxn}$ כך שלכל i,j $a_{i,j} = \pm 1$. הוכח $2^{n-1} \mid \det(A)$.

פתרון:

$$\left|\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \cdots & \pm 2,0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ 0 & \pm 2,0 & \cdots & \pm 2,0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$\left|\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \cdots & & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \cdots & & \pm 2,0 \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & & \pm 4,0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & \cdots & \pm 4,0 \end{pmatrix}\right| = \ldots = \left|\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \cdots & & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \cdots & & \pm 2,0 \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & & \pm 4,0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \pm 2^{n-1},0 \end{pmatrix}\right|$$

$\downarrow$

מכפלת אייברי האלכסון.

(וודאי שאפשר גם באינדוקציה, שזה למעשה ה"שלוש נקודות", נראה לי שיותר חשוב להראות את הפיתוח)

<u>תרגיל:</u>

המספרים 255, 527, 204 מתחלקים ב-17. הראה כי $17 \mid \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_3+100R_1 \\ R_3+10R_2}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 204 & 527 & 255 \end{vmatrix} = 204 \cdot \begin{vmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{vmatrix} - 527 \cdot \begin{vmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{vmatrix} + 255 \cdot \begin{vmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{vmatrix}$$

ע"מ 75, 5.8:

$A \in F^{nxn}$ מקיימת $AA^t = I$. מהם ערכי הדטרמיננטה האפשריים של A?

פתרון:

$$1 = |I| = |AA^t| = |A||A^t| = |A|^2 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

ע"מ 75, 5.9:

$A \in F^{nxn}$ מקיימת $A^k = I$. מהם ערכי הדטרמיננטה האפשריים של A מעל R ומעל C?

$$|A| = \begin{cases} \pm 1, R & \text{מעל} \\ e^{2\pi i k}, C & \text{מעל} \end{cases}$$

תרגיל

א) תהי A מטריצה ממשית והפיכה המקיימת $A^4 + 2A = 0$. חשב את $|A|$.

ב) הוכח שאם קיימים $a_1, a_2, ... a_k$ סקלרים כך שמתקיים
$I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_k A^k = 0$ אז המטריצה A היא הפיכה.

ג) תהיינה A, B מטריצות $n \times n$ כאשר n מספר אי זוגי, מעל שדה שאיננו ממאפיין 2. נתון שמתקיים $AB + BA = 0$. הוכח שלפחות אחת המטריצות A או B היא לא הפיכה.

פתרון:

א)

$$A^4 + 2A = 0 \Rightarrow A^4 = -2A \Rightarrow \det\left(A^4\right) = \det(-2A) \Rightarrow \left(\det A\right)^4 =$$
$$(-2)^n \cdot \det A \Rightarrow \left(\det A\right)^4 - (-2)^n \det A = 0$$
$$\Rightarrow \det A \cdot \left[\left(\det A\right)^3 - (-2)^n\right] = 0$$

מהנתונים שבנוסח השאלה נתון כי A מטריצה ממשית והפיכה כלומר $\det(A) \neq 0$ ולכן יוצא

$$\left(\det A\right)^3 = (-2)^n \Rightarrow \det A = (-2)^{\frac{n}{3}}$$

ב) $I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_k A^k = 0 \Rightarrow I = -a_1 A - a_2 A^2 - ... - a_k A^k$

$\Rightarrow I = A(-a_1 I - a_2 A^1 - ... - a_k A^{k-1})$ כלומר $A^{-1} = -a_1 I - a_2 A^1 - ... - a_k A^{k-1}$

ג)
$$AB+BA=0 \Rightarrow AB=-BA \Rightarrow \det(AB)=\det(-BA) \Rightarrow \det(A)\cdot\det(B)=(-1)^{2k+1}\cdot\det(B)\cdot\det(A)$$

כלומר מתקיים: $2\cdot\det(A)\cdot\det(B)=0$ כלומר $\det(A)=0$ או $\det(B)=0$ כלומר לפחות אחת מהמטריצות איננה הפיכה.

<u>דטרמיננטת העתקות לנאריות:</u>

V מ"ו, B בסיס ל-V, T:V->V ה"ל. דט' T מוגדרת ע"י: $|T|=\left|[T_B]\right|$ ואיננה תלויה בבחירת הבסיס.

<u>ע"מ 77, 8.1ב,ג:</u>

$T,S:V\to V$ ה"ל. הוכח:

ב. T הפיכה אמ"מ הדט' שלה שונה מ-0 (או: T איננה הפיכה אמ"מ הדט' שלה שווה-0)

ג. $\det(ST)=\det S\det T$

פתרון:

ב. <u>T איננה הפיכה</u> אמ"מ <u>הגרעין שלה שונה מאפס</u> אמ"מ <u>קיים וקטור v שונה מאפס כך ש-Tv=0</u> (נרחיב את v לבסיס B) אמ"מ <u>ב- $[T]_B$ קיימת שורת אפסים</u> אמ"מ <u>דט' T היא אפס.</u>

ג. $|S||T|=|[S]_B||[T]_B|=|[S]_B[T]_B|=|[S\circ T]_B|=|S\circ T|$

<u>המטריצה המצורפת/הנלוית (adjoint):</u>

תהי $A=(a_{ij})\in F^{nxn}$ אז $adj(A)=(b_{ij})=\left((-1)^{i+j}|M_{ji}|\right)$

<u>טענה:</u> 1. $(\det A)\cdot I=A\cdot adjA$

2. אם A הפיכה אז: $A^{-1}=\dfrac{adjA}{\det A}$

<u>דוגמא:</u>

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\5&8&0\\-3&1&2\end{pmatrix}$$

מצא: $adjA,\det A,A^{-1}$

פתרון:

$$adjA=\begin{pmatrix}16 & -1 & 8\\ -10 & 1 & -5\\ 29 & -2 & 16\end{pmatrix}$$

$$\det A = 3$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}adjA$$

<u>ע"מ 77 9.5:</u>

$$.A=\begin{pmatrix}b & a & a\\ a & b & a\\ a & a & b\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3^{3\times 3}$$

א. חשב את $\mathrm{adj}(A)$.

ב. הראה בעזרת (א), ש $|A|=b-a$,

פתרון:

$$adjA=\begin{pmatrix}b^2-a^2 & a^2-ab & a^2-ab\\ a^2-ab & b^2-a^2 & a^2-ab\\ a^2-ab & a^2-ab & b^2-a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(b-a)(b+a) & a(a-b) & a(a-b)\\ a(a-b) & (b-a)(b+a) & a(a-b)\\ a(a-b) & a(a-b) & (b-a)(b+a)\end{pmatrix}=$$

$$(a-b)\begin{pmatrix}-(b+a) & a & a\\ a & -(b+a) & a\\ a & a & -(b+a)\end{pmatrix}$$

$$\det A\cdot I=\begin{pmatrix}b & a & a\\ a & b & a\\ a & a & b\end{pmatrix}(a-b)\begin{pmatrix}-(b+a) & a & a\\ a & -(b+a) & a\\ a & a & -(b+a)\end{pmatrix}=$$

$$(a-b)\begin{pmatrix}-b(b+a)+2a^2 & 0 & 0\\ 0 & -b(b+a)+2a^2 & 0\\ 0 & 0 & -b(b+a)+2a^2\end{pmatrix}=(b-a)I\ \downarrow$$

$$(a-b)(-b(b+a)+2a^2=b^3-a^2b+2a^3-2ba^2=b+2a=b-a$$

<u>תרגיל:</u> הוכח $|adj(A)|=|A|^{n-1}$.

פתרון:

ידוע:

$$|A|I = Aadj(A)$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0 : \big||A|I\big| = |Aadj(A)| \Rightarrow |A|^n = |A||adj(A)| \Rightarrow |A|^{n-1} = |adj(A)|$$

$$\nexists A^{-1} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \left|A^{n-1}\right| = 0 : \big||A|I\big| = |Aadj(A)| \Rightarrow 0 = |A||adj(A)| = 0$$

<u>משפט קרמר:</u>

נתונה מערכת משוואות Ax=b עבור מטריצה ריבועית A מסדר n אשר הדטרמיננטה שלה איננה מתאפסת. אזי אוסף הפתרונות $x_1,...,x_n$ של המערכת מקיימים $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}\ \forall i = 1,...,n$ כאשר A_i מתקבלת ע"י מחיקת העמודה ה-i ב-A והצבת b במקומה.

דוגמא:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow y = -2$$

$$|A_3 =| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow z = 2$$

<u>ע"מ 79 10.3:</u>

פתור בעזרת נוסחת קרמר את המערכת הבאה: $\begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ x - y + 5z - w = 5 \end{cases}$

פתרון:

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ x-y+5z-w=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1-w-z \\ x-y=5+w-5z \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1-w-z & -2 \\ 5+w-5z & -1 \end{vmatrix} = 3w+11z+9 \Rightarrow x = 3w+11z+9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1-w-z \\ 1 & 5+w-5z \end{vmatrix} = 4+2w-4z \Rightarrow y = 4+2w-4z$$