9. העתקות Weingarten

9.1 נגזרת כיוונית

$\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.
יהי $v \in \mathbb{R}^n$, ועקומה α

$$\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$$

v הוא ווקטור המהירות של α בנקודה p.

$$v = \left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

הגדרה

תהי f פונקציה מn משתנים. אזי הנגזרת הכיוונית של f בנקודה p בכיוון ווקטור v היא

$$\nabla_v f = \left.\frac{\mathrm{d}\left(f \circ \alpha(t)\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

משפט

ערך של נגזרת כיוונית בלתי תלוי בבחירת העקומה α המייצגת ווקטור v.

$$\begin{cases} \alpha(0) = p \\ \left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v \end{cases}$$

9.2 הרחבת שדה ווקטורי

$$\underline{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$\underline{x}\left(u^1,u^2\right)$ היא פרמטריזציה של M.

$$x_i=\frac{\partial x}{\partial u^i}\qquad i=1,2$$

מישור המשיר T_pM נפרש ע"י שני הווקטורים x_1,x_2

בכל $p\in M$ יש בסיס(שהוא תלוי בp) ל$\mathbb{R}^3$

$$(x_1,x_2,n)$$

ואז ניתן להגדיר את העקומה לפי הבסיס החדש:

$$\underline{x}\circ\alpha=\beta$$

$$[a,b)\xrightarrow{\alpha}\mathbb{R}^2\xrightarrow{\underline{x}\left(u^1,u^2\right)}$$

$$\alpha\left(t\right),a\leq t\leq b$$

$$\alpha\left(t\right)=\left(\alpha^1\left(t\right),\alpha^2\left(t\right)\right)$$

$$\beta=\underline{x}\circ\alpha\left(t\right)$$

לפי כלל השרשרת

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\underline{x}}{\partial u^i}\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\alpha^{1\prime}\underline{x}_1+\alpha^{2\prime}\underline{x}_2$$

בנקודה $\beta=x\left(\alpha\left(t\right)\right)$ יש וקטור נורמלי

$$n\left(u^1,u^2\right)=\frac{\underline{x}_1\times\underline{x}_2}{\left\|x_1+x_2\right\|}$$

הערה

n מוגדר רק במשטח M. זו בעיה, שכן אם נרצה למצוא לו נגזרת כיוונית, נצטרך שהוא יהיה מוגדר בסביבה פתוחה של הנקודה. אנו צריכים דרך להרחיב את השדה הווקטורי.

משפט

יהי M משטח עם פרמטריזציה רגולרית $\underline{x}\left(u^1,u^2\right)$. ניתן להרחיב את השדה הווקטורי $n\left(u^1,u^2\right)$ לשדה ווקטורי $N\left(x,y,z\right)$ מוגדר בסביבה של p, כאשר

$$n\left(u^1,u^2\right)=N\left(\underline{x}\left(u^1,u^2\right)\right)$$

הוכחה

ע"פ משפט הפונקציה הסתומה, M מוגדר(באופן מקומי) ע"י משוואה

$$F\left(x,y,z\right)=0$$

דוגמה: M ספירה: $F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2-1$

לכן נבחר:

$$N\left(x,y,z\right)=\frac{\nabla F}{\left\|\nabla F\right\|}\left(x,y,z\right)$$

כלומר ∇F אנכית למשטח

דוגמה

מעגל:

$$F\left(x,y\right)=x^2+y^2-1$$

$$\nabla F=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$$

משפט

תהי $p\in M$, $v\in T_pM$, כאשר $v=\beta'\left(0\right)$. יהי $N\left(x,y,z\right)$ שדה ווקטורי המרחיב $n\left(u^1,u^2\right)$ לסביבה של p. אזי נגזרת כיוונית ∇_vN מקיימת

$$\nabla_vN=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\qquad\left(n=\alpha\left(t\right)\right)$$

כאשר $\beta\left(t\right)=\underline{x}\circ\alpha\left(t\right)$

$$v=\underline{x}_1\alpha^{1\prime}+\underline{x}_2\alpha^{2\prime}$$

$$\boxed{T_pM=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left(\underline{x}_1,\underline{x}_2\right)}$$

הוכחה

$$\nabla_v N = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} N\left(\beta\left(t\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} N\left(\underline{x} - \alpha\left(t\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}n\left(\alpha\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

9.3 Hessian של פונקציה בנקודה קריטית

תהי $f\left(x,y\right)$ פונקציה גזירה בסביבה של נקודה קריטית(כאשר $\nabla f\left(p\right) = 0$)

הערה

נבנה גרף של f:

$$\underline{x}\left(u^1,u^2\right) = \left(u^1,u^2,f\left(u^1,u^2\right)\right)$$

$$\underline{x}_1 = \left(1,0,f'_x\right) \qquad \underline{x}_2 = \left(0,1,f'_y\right)$$

אזי המישור המשיק של הגרף בנקודה קריטית $\nabla f = 0$ הוא מישור $\left(x,y\right)$:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{x}_1 = \left(1,0,0\right) \\ \underline{x}_2 = \left(0,1,0\right) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{\underline{x}_1 = e_1} \\ \boxed{\underline{x}_2 = e_2} \end{matrix}$$

ההסיאן של f הוא

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yz} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

משפט

בנקודה קריטית של f, נניח שערכים עצמיים λ_1,λ_2 של H_f הם שונים מאפס.
אם יש אותו סימן לλ_1 וλ_2 אז נקודה קריטית היא מינימום או מקסימום. אם סימנים של λ_1 וλ_2 הם שונים אזי נקודה קריטית היא נקודת אוכף.

9.4 מHessian להעתקה Weingarten

תהי $p \in M$. יהי T_pM המישור המשיק לM. העתקה Weingarten(בנקודה p) W_p היא

$$W_p : T_pM \to T_pM$$

אנדומורפיזם[1] של מישור המשיק, מוגדר ע"י נגזרת כיוונית: לכל $v\in T_pM$, נגדיר

$$W_p\left(v\right)=\nabla_vN=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}n\circ\alpha\left(t\right)$$

כאשר $\boxed{v=\beta'\left(0\right)}$ ואילו $\beta\left(t\right)=x\circ\alpha\left(t\right)$, $\boxed{\beta\left(0\right)=p}$

למה

תמונה של W_p נמצאת בתוך המשיק

הוכחה

$$\mathbb{R}^3=T_pM+\mathbb{R}n$$

צריך להוכיח ש$W_p\left(v\right)$ מאונך לנורמל.

$$\left\langle W_p\left(v\right),n\right\rangle\overset{??}{=}0$$

$$\left\langle W_p\left(v\right),n\left(u^1,u^2\right)\right\rangle=\left\langle\nabla_vN,n\circ\alpha\left(t\right)\right\rangle=\left.\left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n\circ\alpha\left(t\right),n\circ\alpha\left(t\right)\right\rangle\right|_{t=0}=\cdots$$

לפי כלל ליבניץ זה שווה

$$\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle n\circ\alpha\left(t\right),n\circ\alpha\left(t\right)\right\rangle=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|n\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1\right)=0$$

$$W_p\left(v\right)\perp n$$

לכן $W_p\left(v\right)\in T_p\left(m\right)$

משפט

העתקה Weingarten W_p היא אנדומורפיזם <u>צמוד לעצמו</u> של מישור T_pM, ומקיים

$$\left\langle W\left(x_i\right),x_j\right\rangle=-\left\langle n,\frac{\partial^2\underline{x}}{\partial u^i\partial u^j}\right\rangle$$

$$\boxed{\forall_{u,v}\left\langle W\left(u\right),v\right\rangle=\left\langle u,W\left(v\right)\right\rangle}$$

[1] העתקה לעצמו

הוכחה

W_p היא <u>לינארית</u>:

$$W_p\left(u+\lambda v\right)=\nabla_{u+\lambda v}N=\nabla_uN+\lambda\nabla_vN=W\left(u\right)+\lambda W\left(v\right)$$

לכן

$$\left\langle W\left(x_i\right),x_j\right\rangle=\left\langle\nabla_{x_i}N,x_j\right\rangle$$

$$\frac{\partial x}{\partial u^1}=\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\underline{x}\left(u^1,u^2\right)\right)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\underline{x}\left(u^1+t,u^2\right)$$

$$\boxed{\alpha\left(t\right)=\underline{x}\left(u^1+t,u^2\right)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u^1}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\underbrace{x\circ\alpha\left(t\right)}_{\beta(t)}$$

$$\nabla_{x_1}N=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}N\left(\beta\left(t\right)\right)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}n\circ\alpha\left(t\right)=$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}n\left(u^1+t,u^2\right)=\frac{\partial}{\partial u^1}n\left(u^1,u^2\right)$$

$$\nabla_{\underline{x}_i}N=\frac{\partial n}{\partial u^i}$$

$$\left\langle W\left(x_i\right),x_j\right\rangle=\left\langle\frac{\partial n}{\partial u^i},\frac{\partial\underline{x}}{\partial u^j}\right\rangle=\cancel{\left\langle n,\frac{\partial\underline{x}}{\partial u^j}\right\rangle}-\left\langle n,\frac{\partial^2\underline{x}}{\partial u^j\partial u^i}\right\rangle=\left\langle n,\underline{x}_{ij}\right\rangle$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial u^i}\left\langle n,x_j\right\rangle=\left\langle\frac{\partial n}{\partial u^i},x_j\right\rangle+\left\langle n,x_{ij}\right\rangle}$$

מסקנה

ערכים עצמיים של W_p הם ממשיים.

הגדרה

עקמומימות ראשיות $\left(u^1,u^2\right)$ k_1, k_2 של המשטח הן ערכים עצמיים של $W_p:T_p\to T_p$.

דוגמה

נתבונן במשטח $\underline{x}\left(u^1,u^2\right)=\left(u^1,u^2,0\right)$

$$x_1=e_1 \qquad x_2=e_2 \qquad n=x_1\times x_2=e_3$$

$\nabla_v N=0$ בכל נקודה. $W_p\equiv 0$ <u>בכל נקודה</u>.

$$k_1=k_2\equiv 0$$

דוגמה

$$x\left(u^1,u^2\right)=\left(u^1,u^2,f\left(u^1,u^2\right)\right)$$

$$x_1=(1,0,f_x) \qquad x_2=(0,1,f_y)$$

בנקודה קריטית:

$$x_1=e_1 \qquad x_2=e_2 \qquad n=e_3$$

$$\langle W(x_i),x_j\rangle=-\langle n,x_{ij}\rangle$$

$$\underline{x}_{11}=\left(0,0,f_{xx}\left(u^1,u^2\right)\right)$$

$$\underline{x}_{22}=\left(0,0,f_{yy}\left(u^1,u^2\right)\right)$$

$$\underline{x}_{12}=\left(0,0,f_{xy}\left(u^1,u^2\right)\right)$$

$$\underline{x}_{ij}=(0,0)\frac{\partial^2 f\left(u^1,u^2\right)}{\partial u^i\partial u^j}$$

$$\langle x_{ij},n\rangle=\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}$$

$$\langle W(x_i),x_j\rangle=-\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}$$

$$\left(\langle W(x_i),x_j\rangle\right)_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}=-H_f$$

9.5 העתקת Weingarten של ספירה וגליל

למה

העתקת Weingarten של הספירה ברדיוס $r > 0$ היא העתקה סקלרית $T_p \to T_p$, מוגדרת ע"י

$$\frac{1}{r}\mathrm{Id} = \frac{1}{r}\mathrm{Id}_{T_p}$$

(העתקת זהות של מישור משיק T_p)

הוכחה

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$F\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\beta\left(t\right) = \underline{x} \circ \alpha\left(t\right)$$

$$n\left(\alpha\left(t\right)\right)$$

$$n\left(\alpha\left(t\right)\right) = \frac{1}{r}\beta\left(t\right)$$

לכן

$$W_p\left(v\right) = \nabla_v N = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} N\left(\beta\left(t\right)\right) = ...$$

...

דוגמה - גליל

$$x\left(u^1, u^2\right) = \left(\cos u^1, \sin u^1, u^2\right)$$

$$n\left(u^1, u^2\right) = \left(\cos u^1, \sin u^1, 0\right)$$

לכן

$$W_p\left(\underline{x}_1\right)\nabla_{\underline{x}_1}N=\frac{\partial}{\partial u^1}\left(n\left(u^1,u^2\right)\right)=\left(-\sin u^1,\cos u^1,0\right)=\underline{x}_1$$

$$W_p\left(\underline{x}_2\right)=\frac{\partial}{\partial u^2}\left(n\left(u^1,u^2\right)\right)=\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\cos u^1,\sin u^1,0\right)=0$$

$$W_p\left(\underline{x}_2\right)=0$$

הערה

$$\operatorname{rank}\left(W_p\right)=1$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad\left(\underline{x}_1,\underline{x}_2\right)$$

9.6 מקדמים ${L^i}_j$

הגדרה

$$W_p\left(\underline{x}_j\right)=L_j^1\underline{x}_1+L_j^2\underline{x}_2$$

$$W_p\left(\underline{x}_j\right)=L_j^i\underline{x}_i$$

ן

דוגמה ־ ספירה

$$\left(L_j^i\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}&0\\0&\frac{1}{r}\end{pmatrix}$$

דוגמה - גליל

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^1_1 = 1$$

$$L^1{}_2 = L^2_1 = L^2_2 = 0$$

$$x_{ij} = \Gamma^k_{ij} x_k + L_{ij} n$$

(תזכורת: $\Gamma^k_{ij} x_k = \sum\limits_k \Gamma^k_{ji} x_k$ לפי סימוני איינשטיין)

9.7 עקמומיות Gauss

הגדרה

עקמומיון Gauss $K = K\left(u^1, u^2\right)$ של משטח $\underline{x}\left(u^1, u^2\right)$ היא דטרמיננטה של העתקה Weingarten:

$$K\left(u^1, u^2\right) = \det W_p = L^1_1 L^2_2 - L^1_2 L^2_1$$

$$K = 2L^1_{[1} L^2_{2]}$$

דוגמאות

- ספירה ברדיוס $r > 0$:

$$K = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2}$$

$$K = \frac{1}{r^2}$$

- גליל:

$$K = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 0$$

בגלל זה ניתן לקפל דף לגליל, אבל לא לכדור