אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 2

5 בנובמבר 2019

הגדרה: תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נאמר ש־E מדידה לבג אם לכל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$, כאשר E^c היא המשלים של E.

תכונות (מההרצאה):

1. אם E מדידה אז E^c מדידה.
2. אם $m^*(E) = 0$ אז E מדידה.
3. אם E מדידה אז $E + a$ מדידה לכל $a \in \mathbb{R}$.
4. אם $\{E_n\}$ קבוצות מדידות, אז $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ מדידה.
5. אם $\{E_n\}$ קבוצות מדידות זרות בזוגות, אז $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

הצמצום של m^* על הקבוצות המדידות נקרא מידת לבג, ומסומן ב־m.

הגדרה: תהי X קבוצה. אוסף $S \subseteq \mathbb{P}(X)$ נקרא σ־אלגברה אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. אם $E \in S$ אז $E^c \in S$.
2. אם $\{E_n\} \subseteq S$ אז גם $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$.
3. $\emptyset \in S$ (ולכן גם $X \in S$)

אם תנאי 2 מתקיים עבור איחוד סופי, S נקראת אלגברה מעל X.

הערה: מהתכונות שהוכחנו בהרצאה, נובע כי הקבוצות המדידות לבג מהוות σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$. נסמן אותה ב־$\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

תרגיל: הראו כי איחוד של σ־אלגברות הוא לא בהכרח σ־אלגברה.

פתרון: יש למצוא קבוצה X עם S_1, S_2 σ־אלגברות מעליה, כך ש־$S_1 \cup S_2$ היא לא σ־אלגברה. נוכל לקחת למשל את $X = \{1,2,3\}$, עם $S_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ ו־$S_2 = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. אכן, S_1 ו־S_2 הן σ־אלגברות, אבל $S_1 \cup S_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ היא לא σ־אלגברה, כי למשל $\{1\} \cup \{3\} \notin S_1 \cup S_2$.

הגדרה: ה־σ־אלגברה הנוצרת על ידי $T \subseteq \mathbb{P}(X)$ היא ה־σ־אלגברה המינימלית המכילה את T. נסמנה $\sigma(T)$. בפרט, אם (X,τ) מרחב טופולוגי, ה־σ־אלגברה הנוצרת על ידי הטופולוגיה מכונה σ־אלגברת בורל ומסומנת $\mathcal{B}(X)$.

תרגיל: תהיינה $S_1 \subseteq S_2 \subseteq ...$ סדרת σ־אלגברות מעל קבוצה X. האם $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ היא σ־אלגברה?

פתרון: נראה שלא בהכרח, על ידי בניית דוגמה נגדית. נסמן $X = \{(x_1, x_2, ...) | \forall i : x_i \in \{0,1\}\}$, כלומר סדרות שאיבריהן הן אפסים ואחדות. נגדיר את S_1 להיות ה־σ־אלגברה הנוצרת על ידי הקבוצה $A_1 = \{x \in X | x_1 = 1\}$. נגדיר את S_2 להיות ה־σ־אלגברה הנוצרת על ידי A_1 ו־$A_2 = \{x \in X | x_2 = 1\}$. באופן דומה נגדיר את S_n להיות ה־σ־אלגברה הנוצרת על ידי כל הקבוצות מ־A_1 עד $A_n = \{x \in X | x_n = 1\}$. ניתן לומר אינטואיטיבית שב־S_n ניתן להבדיל בין n האיברים הראשונים של הסדרות ב־X. בדוגמה שבנינו אכן מתקיים התנאי $S_1 \subseteq S_2 \subseteq ...$, אבל נראה כי $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ אינה σ־אלגברה. נסמן $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. נניח בשלילה כי $A \in S$. אז קיים n עבורו $A \in S_n$. אבל לכל n כל הקבוצות ב־S_n הן אינסופיות, לעומת זאת $A = \{(1,1,1...)\}$ היא סופית, בסתירה. לכן S לא סגורה לחיתוך בן־מניה.

תרגיל: הראו כי ה־σ־אלגברה הנוצרת על ידי הנקודונים ב־$\mathbb{R}$ מוכלת ממש ב־$\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

הוכחה: נגדיר אוסף של קבוצות $S = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| \le \aleph_0 \vee |A^c| \le \aleph_0\}$. נראה כי S היא σ־אלגברה. סגירות למשלים והכלת הקבוצה הריקה ברורות, יש להוכיח סגירות לאיחוד בן־מניה. תהיינה $\{A_n\} \subseteq S$. אם לכל n, A_n היא בת־מניה, אז גם $\bigcup_n A_n$ בת־מניה ולכן $\bigcup_n A_n \in S$. אחרת, אחת מהקבוצות לא בת־מניה, נסמנה A_m. אז מכלל דה־מורגן $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c = \bigcap_n A_n^c \cap A_m^c$ ולכן זו קבוצה בת־מניה, ומסגירות למשלים $\bigcup_n A_n \in S$. לכן S היא σ־אלגברה. S מכילה את כל הנקודונים ב־$\mathbb{R}$, ולכן $\sigma(\{\{x\} | x \in \mathbb{R}\}) \subseteq S$. מצד שני $S \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, למשל נתבונן על קטעים ב־$\mathbb{R}$.

הגדרה: נסמן $C_0 = [0,1]$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את C_{n+1} להיות C_n לאחר הסרת השליש האמצעי הפתוח שלו, על ידי הנוסחה $C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3} + \frac{2}{3}\right)$. קבוצת קנטור היא החיתוך $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

טענה: יהי $x \in [0,1]$ אם נציג את x בבסיס טרינארי $x = 0.x_1x_2...$ (כלומר $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$) אז $x \in C$ אם ורק אם לכל n טבעי, $x_n \in \{0,2\}$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה לשני הכיוונים. עבור $n = 1$, $x \in C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ אם ורק אם $x_1 \in \{0,2\}$. נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$. בכיוון אחד, אם $x \in C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3} + \frac{2}{3}\right)$ אז $x \in \frac{C_n}{3}$ או $x \in \left(\frac{C_n}{3} + \frac{2}{3}\right)$, לכן $3x \in C_n$ או $3x - 2 \in C_n$. לפי הנחת האינדוקציה, $(3x)_n \in \{0,2\}$ או $(3x-2)_n \in \{0,2\}$. נשים לב כי $(3x-2)_n = (3x)_n = x_{n+1}$ לכן גם $x_{n+1} \in \{0,2\}$. בכיוון השני, נניח כי $x_1, ..., x_n, x_{n+1} \in \{0,2\}$. לפי הנחת האינדוקציה $x \in C_n$. נוכיח כי $x \in C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3} + \frac{2}{3}\right)$, כלומר $3x \in C_n$ או $3x - 2 \in C_n$. ובכן, אם $x_1 = 0$ אז $3x = 0.x_2x_3...x_nx_{n+1} \in C_n$, אחרת $x_1 = 2$ ואז $3x - 2 = 0.x_2x_3...x_nx_{n+1} \in C_n$. נסיים מהאינדוקציה. מחיתוך הקבוצות C_n נקבל את הדרוש.

טענה: C אינה בת־מניה.

הוכחה: ניעזר בטענה הקודמת. נוכל לבנות התאמה חד־חד־ערכית ועל בין C לבין הקטע $[0,1]$. יהי $x \in C$. נייצג את x בבסיס טרינארי, ונחליף כל מופע של 2 ב־1. קיבלנו ייצוג בינארי של מספר a בין 0 ל־1. נגדיר העתקה $x \mapsto a$.

טענה: C היא קבוצה ממידה אפס.

הוכחה: לכל n טבעי, $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \subseteq C_n$. נשים לב שב־$C_n$ יש 2^n קטעים מאורך 3^{-n} כל אחד, ולכן ממונוטוניות $0 \le m(C) \le m(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$. נשאיף את n לאינסוף ונקבל $m(C) = 0$.

הגדרה: יהי (X,S) מרחב מדיד, כלומר קבוצה X ומעליה σ־אלגברה S. מידה (חיובית) על (X,S) היא פונקציה $\mu : S \to [0,\infty]$ המקיימת:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. σ־אדיטיביות: אם $\{E_n\}$ קבוצות ב־S זרות בזוגות אז $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

השלשה הסדורה (X,S,μ) תיקרא מרחב מידה חיובית.

דוגמה: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ הוא מרחב מידה חיובית. ראינו בהרצאה כי m היא σ־אדיטיבית על הקבוצות המדידות לבג.

דוגמה: נתבונן בקבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$. נוכל להגדיר σ־אלגברת בורל מעל הטופולוגיה הדיסקרטית, כלומר $\mathcal{B}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\mathbb{N})$. נגדיר את מידת הספירה $\#(A) = |A|$. אז $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \#)$ הוא מרחב מידה חיובית.

תכונות המידה:

1. מונוטוניות: אם $A \subseteq B \subseteq S$ אז $\mu(A) \le \mu(B)$.
2. σ־תת־אדיטיביות: עבור $\{E_n\} \subseteq S$ לאו דווקא זרות בזוגות, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.
3. רציפות עולה: תהיינה $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ סדרת קבוצות עולה ב־S. אז $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.
4. רציפות יורדת: תהיינה $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ סדרת קבוצות יורדת ב־S, כך ש־$\mu(E_1) < \infty$. אז $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

דוגמה: נראה שברציפות יורדת, התנאי על חסימות המידה הוא הכרחי. ניקח $\mu = m$ מידת לבג, ונתבונן בקבוצות $E_n = [n,\infty]$. קל לראות כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, ולכן מ־$\sigma$־אדיטיביות נקבל $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\emptyset) = 0$. מצד שני, לכל n טבעי $\mu(E_n) = \mu([n,\infty]) = \infty$, ולכן $0 = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty$.