תרגיל בית 7 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

תהי X קבוצה אינסופית. יהי x_0 איבר ב- X. נגדיר $\tau = \{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{B \subseteq X : X \setminus B \text{ is finite}\}$.

א. הוכיחו ש- τ טופולוגיה על X.

ב. הראו שכל הנקודונים ב- X, פרט ל- $\{x_0\}$, הינם סגורים. מה לגבי $\{x_0\}$?

ג. הראו: $cl(A) = \begin{cases} A & A \text{ is finite} \\ A \cup \{x_0\} & \text{otherwise} \end{cases}$.

ד. הראו: $int(A) = \begin{cases} A & X \setminus A \text{ is finite} \\ A \setminus \{x_0\} & \text{otherwise} \end{cases}$.

<u>שאלה 2</u>

יהי X מ"ט ותהי $A \subseteq X$. תהי $\chi_A : X \to \{0,1\}$ פונקציה אופיינית המוגדרת על-ידי $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$. יהי $x \in X$.

א. הוכיחו שאם χ_A רציפה ב- x אז $x \notin \partial(A)$.

ב. הוכיחו ש χ_A רציפה <u>אמ"מ</u> $\partial(A) = \varnothing$ <u>אמ"מ</u> A סגוחה ב- X.

ג. הסיקו שאם X לא קשיר אז קיימת פונקציה רציפה ועל $f : X \to \{0,1\}$.

<u>שאלה 3</u>

יהי X מ"ט, ותהיינה $A, B \subseteq X$ ת"ק.

א. הוכיחו כי מתקיים $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$.

ב. הראו על ידי דוגמה נגדית כי לא ניתן להחליף את ההכלה בסעיף א' בשיוויון.

ג. נסחו והוכיחו טענה דומה (כמו בסעיף א') עבור $int(A \cup B)$.

<u>שאלה 4</u>

יהיו X, Y מ"ט, ותהי $f : X \to Y$ הומאומורפיזם. הוכיחו כי לכל $A \subseteq X$ מתקיים:

א. $f(int(A)) = int(f(A))$

ב. $f\left(cl\left(A\right)\right)=cl\left(f\left(A\right)\right)$

ג. $\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)^{C}=cl\left(A^{C}\right)$

ד. $\operatorname{int}\left(A^{C}\right)=\left(cl\left(A\right)\right)^{C}$

שאלה 5

יהי X מרחב טופולוגי, U קבוצה פתוחה וְ-A קבוצה צפופה.

א. הוכיחו $U\subseteq cl(A\cap U)$ והסיקו: $cl\left(U\right)=cl\left(A\cap U\right)$.

ב. אפיינו את המרחבים הטופולוגיים X עבורם הקבוצה הצפופה היחידה היא X עצמה. הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl\left(B(a,r)\right)=B[a,r]$. מצאו דוגמה נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

שאלה 7

תהיינה τ_1,τ_2 טופולוגיות על X כך ש-$\tau_1\subseteq\tau_2$. הוכיחו:

א. F סגורה ב-$\left(X,\tau_1\right)$ $\Leftarrow$ F סגורה ב-$\left(X,\tau_2\right)$.

נסמן ב- $\operatorname{int}_{\tau_i}\left(A\right)$ את הפנים של A במרחב $\left(X,\tau_i\right)$ (כנ"ל עבור $cl_{\tau_i}\left(A\right)$).

ב. הוכיחו או הפריכו: $\operatorname{int}_{\tau_2}\left(A\right)\subseteq\operatorname{int}_{\tau_1}\left(A\right)$, $cl_{\tau_2}\left(A\right)\supseteq cl_{\tau_1}\left(A\right)$.

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

ג. יהי $\left(\mathbb{R},T\right)$ הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

$(0,1],(0,1),[0,1],[0,1)$.

בהצלחה!