בחינה בקורס 88-526-01 גיאומטריה דיפרנציאלית 1
מועד ג
מרצה: פרופ' מיכאל כץ
תאריך בחינה: 05.08.08
משך הבחינה: שעתיים וחצי

בהצלחה!

נא לתת הצדקה לכל תשובה.

1. נסתכל על המשטח M ב- R^3: $M = \{(x,y,z) \in R^3 : 4x^2+4y^2+4z^2 = 1\}$.

א) מצאו עקומת C מהירות יחידה, וגם פרמטריזציה של M כמשטח סיבוב של C.
ב) חשבו את התבנית היסודית הראשונה של M.
ג) חשבו את התבנית היסודית השניה של M.
ד) חשבו את מיפוי ויינגרטן של M.

2. נתון המשטח הבא ב- R^3: $M = \{(x,y,z) \in R^3 : z = y^3\}$.

א) מהי עקמומיות גאוס K של M ?
ב) הוכיחו שהקו $L = \{(x,y,z) \in R^3 : y = z = 0\}$ הוא עקומה גיאודזית של M.
ג) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

נניח ש- M_1, M_2 שני משטחים ב- R^3 כך שעקמומיות גאוס שלהם קבועה ושווה (ז"א $K_{M_1} = K_{M_2}$ בכל נקודה). אזי קיימת איזומטריה בין M_1 ובין M_2.

3. נסתכל על מישור $R^2 = \{(x,y) : x,y \in R\}$ כאשר הוא מצויד בתבנית היסודית הראשונה הבאה:

$$g_{ij} = e^{(x+y)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

א) מצאו את סימני כריסטופל Γ_{ij}^k.
ב) האם הישר $y = x$ הוא עקומה גיאודזית?
ג) האם הישר $y = 0$ הוא עקומה גיאודזית?
ד) האם הישר $x = 1$ הוא עקומה גיאודזית?

4. נסתכל על משטח M שהוא ספרה ב- R^3 בעלת רדיוס 6 ומרכז בראשית הצירים. יהי $-6<a<6$ מספר כלשהו.

א) מצאו פרמטריזצית מהירות יחידה ועקמומיות של עקומת החיתוך γ של M ושל המישור { z=a }.
ב) עבור איזה ערך של a העקומה הנ"ל היא עקומה גיאודזית על גבי M?
-- נסמן הערך שמצאתם בסעיף ג) ב- b.
ג) עבור $a = b+1$, תהי S ספרה, שעקומת החיתוך γ של M ושל המישור z=a היא עקומה גיאודזית של S. מצאו פרמטריזציה של S כמשטח סיבוב של עקומת מהירות יחידה.

5. נתבונן במשטח רגולרי $x(u^1,u^2)$ ב- R^3.

א) הגדר את מושג הרגולריות של $x(u^1,u^2)$
ב) הוכח שהבטוי $\dfrac{\partial}{\partial u^m}(\Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij}n)$ הוא סימטרי ביחס לאינדקסים j וגם m.
ג) כתוב את הביטוי $L_{i[j}L^q{}_{k]}$ באמצעות של המקדמים Γ וגם g_{ij} בלבד.

בחינה בקורס 88-526-01 גיאומטריה דיפרנציאלית 1
מועד ג
מרצה: פרופ' מיכאל כץ
תאריך בחינה: 05.08.08
משך הבחינה: שעתיים וחצי

בהצלחה!

נא לתת הצדקה לכל תשובה.

1. נסתכל על המשטח M ב- R^3: $M = \{(x,y,z) \in R^3 : 4x^2+4y^2+4z^2 = 1\}$.
א) מצאו עקומת C מהירות יחידה, וגם פרמטריזציה של M כמשטח סיבוב של C.
ב) חשבו את התבנית היסודית הראשונה של M.
ג) חשבו את התבנית היסודית השניה של M.
ד) חשבו את מיפוי ויינגרטן של M.

2. נתון המשטח הבא ב- R^3: $M = \{(x,y,z) \in R^3 : z = y^3\}$.
א) מהי עקמומיות גאוס K של M ?
ב) הוכיחו שהקו $L = \{(x,y,z) \in R^3 : y = z = 0\}$ הוא *עקומה גיאודזית* של M.
ג) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
נניח ש- M_1, M_2 שני משטחים ב- R^3 כך שעקמומיות גאוס שלהם קבועה ושווה (ז"א $K_{M_1} = K_{M_2}$ בכל נקודה). אזי קיימת איזומטריה בין M_1 ובין M_2.

3. נסתכל על מישור $R^2 = \{(x,y) : x,y \in R\}$ כאשר הוא מצויד בתבנית היסודית הראשונה הבאה:
$$g_{ij} = e^{(x+y)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$
א) מצאו את סימני כריסטופל Γ_{ij}^k.
ב) האם הישר $y = x$ הוא עקומה גיאודזית?
ג) האם הישר $y = 0$ הוא עקומה גיאודזית?
ד) האם הישר $x = 1$ הוא עקומה גיאודזית?

4. נסתכל על משטח M שהוא ספרה ב- R^3 בעלת רדיוס 6 ומרכז בראשית הצירים. יהי $-6<a<6$ מספר כלשהו.
א) מצאו פרמטריזצית מהירות יחידה ועקמומיות של עקומת החיתוך γ של M ושל המישור { z=a }.
ב) עבור איזה ערך של a העקומה הנ"ל היא עקומה גיאודזית על גבי M?
-- נסמן הערך שמצאתם בסעיף ג) ב- b.
ג) עבור $a = b+1$, תהי S ספרה, שעקומת החיתוך γ של M ושל המישור z=a היא עקומה גיאודזית של S. מצאו פרמטריזציה של S כמשטח סיבוב של עקומת מהירות יחידה.

5. נתבונן במשטח רגולרי $x(u^1,u^2)$ ב- R^3.
א) הגדר את מושג הרגולריות של $x(u^1,u^2)$
ב) הוכח שהבטוי $\dfrac{\partial}{\partial u^m}(\Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij}n)$ הוא סימטרי ביחס לאינדקסים j וגם m.
ג) כתוב את הביטוי $L_{i[j}L^q{}_{k]}$ באמצעות של המקדמים Γ וגם g_{ij} בלבד.