<u>עזרת 3 - שעור חזרה:</u>

① הוכח את השאלה הבאה מבלי להשתמש ב- $AB=I \Rightarrow \begin{cases} BA=I \\ A=B^{-1} \\ B=A^{-1} \end{cases}$

$A,B\in M_n(F)$ כך ש- $AB=I$.

$T: M_n(F)\to M_n(F)$

$T(X)=BX \quad \forall X\in M_n(F)$

א. הוכח T איזומ'.

ב. הסבר כ-א' מראות ש-B הפיכה.

<u>פתרון:</u>

א. <u>ל"ל:</u> $T(X_1+\alpha X_2)=B(X_1+\alpha X_2)=BX_1+\alpha BX_2=T(X_1)+\alpha T(X_2).$

<u>חח"ע:</u> $X\in \ker T = T(X)=0 \Rightarrow BX=0 /\cdot A \Rightarrow \underbrace{AB}_{=I}X=A0=0 \Rightarrow X=0 \Rightarrow \ker T=\{0\}.$

<u>על:</u> ידוע כי עבור ה"ל $T: V\to W$ כך ש- $\dim(V)=\dim(W)$ T חח"ע $\Leftrightarrow$ T על.
בפרט נכון כאשר $V=W$. ולכן T על.

ב. T איזומ' $\Rightarrow$ T הפיכה $\Rightarrow \forall Y\in M_n(F)\ \exists! X\in M_n(F):$
$T^{-1}(Y)=X.$

בפרט: עבור $Y=I$

$\exists! A'\in M_n(F): \ T^{-1}(I)=A'$

$\Downarrow$

$I=T(A')=BA'$

ידוע $AB=I$

$\Downarrow$

$A'=IA'=ABA'=A\cdot I=A$

וסה"כ: $AB=BA=I \Rightarrow A=B^{-1}$

$$V=(\mathbb{Z}_2)^3 \qquad \text{②}$$

$$T: V \to V$$

$$T(x,y,z) = (x^2+y^2,\ y^2+z^2,\ x^2+z^2)$$

א. הוכח T ט"ל

ב. מצא בסיסים B_1, B_2 ל- $\ker T$, $\operatorname{Im} T$.

ג. מצא/ עוד אפשרות ל- $\ker T$, $\operatorname{Im} T$.

ד. $B = B_1 \cup B_2$. הוכח B בסיס ל-V.

ה. חשב $[T]^B_B$, אזי 5 הבסיס הנתון.

__פתרון:__ תזכורת: $\quad \Rightarrow -x = (n-1)x \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{Z}_n \ \ nx = 0 \\ x^n = x \end{cases}$

אם n ראשוני, אז:

א. $T(\underset{(x_1,x_2,x_3)}{V_1} + \alpha \underset{(y_1,y_2,y_3)}{V_2}) = T(x_1+\alpha y_1, x_2+\alpha y_2, x_3+\alpha y_3) =$

$$\left((x_1+\alpha y_1)^2 + (x_2+\alpha y_2)^2, \ldots, \ldots\right) =$$

$$(x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 + \cancel{2x_1\alpha y_1} + x_2^2 + \alpha^2 y_2^2 + \cancel{2x_2\alpha y_2}, \ldots, \ldots) =$$

$$(x_1^2+x_2^2,\ x_2^2+x_3^2,\ x_1^2+x_3^2) + \alpha(y_1^2+y_2^2,\ y_2^2+y_3^2,\ y_1^2+y_3^2)$$

$$= T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

ב. __KerT:__ $\quad T(x,y,z) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = -y^2 \\ y^2 = -z^2 \\ z^2 = -x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = -y^2 = z^2 = -x^2$$

$$a \in \{0,1\} = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z}_2 \quad a = -a = a^2$$

$$x = -y = z \quad -\text{פל!}$$

$$\Downarrow$$

$$x = y = z$$

$$\ker(T) = \{(a,a,a) : a \in \mathbb{Z}_2\} \Rightarrow B_1 = \{(1,1,1)\}$$

$$(u,v,w) \in \mathbb{Z}_2^3 : \ \exists (x,y,z) \in \mathbb{Z}_2^3 : \ \left.\begin{array}{l} u = x^2+y^2 = x+y \\ v = y^2+z^2 = y+z \\ w = x^2+z^2 = x+z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v = y+z = \\ 2x+y+z = u+w \end{array}$$

$Im(T)=\{(u,u+w,w): u,w\in \mathbb{Z}_2\} \Rightarrow$

$B_2=\{(1,1,0),(0,1,1)\}$

$\ker T=\{(a,a,a): a\in \mathbb{Z}_2\}=\{(a,a,a): a\in\{0,1\}\}=$
$\{(0,0,0),(1,1,1)\} \Rightarrow |\ker(T)|=2$

$Im(T)=\{(u,u+v,w): u,w\in\{0,1\}\} \Rightarrow |Im(T)|=4$

$B=\{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}\subseteq \mathbb{Z}_2^3$ ג.

$\dim(\mathbb{Z}_2^3)=3 \Rightarrow$ צ"ל B בת"ל

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$T(e_1)=(1,0,1)=2v_1-v_3-v_2$ ד.

$T(e_2)=(1,1,0)=v_2$ $\Rightarrow [T]_B^S=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$T(e_3)=(0,1,1)=v_3$

צ"ל $T: V\to V$ ③

$T^2=T$

$V=\ker T\oplus Im T$ הוכחה

$+$:

$V=V+T(v)-T(v)=\underbrace{V-T(v)}+T(v)$

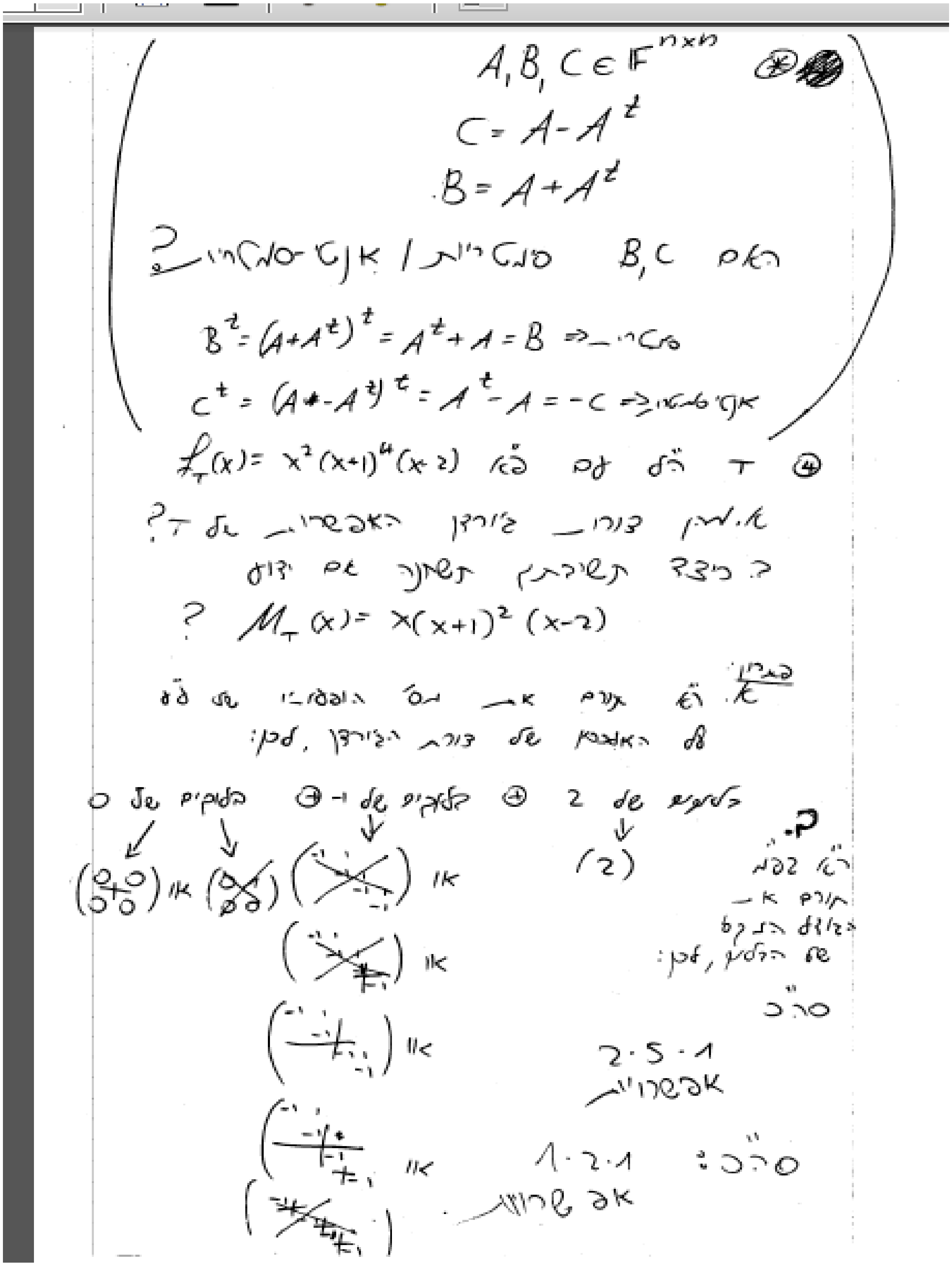
$T(v-T(v))=T(v)-T^2(v)=T(v)-T(v)=0 \Rightarrow v-T(v)\in\ker T$

$T(v)\in Im T$

$\oplus$:

$v\in\ker T\cap Im T \Rightarrow \exists u: T(u)=v \wedge T(v)=0 \Rightarrow$

$T^2(u)=T(v)=0 \wedge T^2(u)=T(u)=v \Rightarrow \boxed{v=0}$



(המטריצות

שנמחקו רלוונטיות לסעיף א' אך לא ל-ב'. ה"סה"כ אפשרויות" הראשון-סעיף א, . ה"סה"כ אפשרויות" השני-סעיף ב).

$$T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$$ (5)

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c+ai\\c+bi\\-ci\end{pmatrix}$$

א. הראה T הפיך

ב. " " לכסין

ג. $T^n=?$ $\forall n\in\{-1,3,2013\}$

ר רק [illegible].

פתרון:

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\ T(e_2)=\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix},\ T(e_3)=\begin{pmatrix}-1\\1\\-i\end{pmatrix}$$ (6)

$$\Rightarrow [T]_S^S=\begin{pmatrix}i&0&-1\\0&i&1\\0&0&-i\end{pmatrix}$$

הפיכה $\Leftarrow$ T הפיך.

ב.

$$f_T(x)=(x-i)^2(x+i)$$

$\underline{\lambda_{1,2}=i}$: $\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&0\\&0&-1&0\\&&-2i&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&0\\0&\cdots&&0\\0&\cdots&&0\end{array}\right)$

$z=0$ $\quad V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

ר"א = ר"ג = 2.

$\underline{\lambda_3=-i}$: $\left(\begin{array}{ccc|c}2i&0&1&0\\&2i&-1&0\\&&0&0\end{array}\right)$ $\quad 2iy=z \Rightarrow y=-\frac{1}{2}iz$ $\quad V=\left\{\begin{pmatrix}i\\-i\\2\end{pmatrix}\right\}$

$$2ix=-z\Rightarrow x=\frac{1}{2}iz$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 - iR_3]{R_2 + iR_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & i \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -i & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & i \end{array}\right)$$

$$[T^{-1}]_S^S = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & & \\ & -i & \\ & & i \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(e_1) = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\,T^{-1}(e_1) + b\,T^{-1}(e_2) + c\,T^{-1}(e_3) = \begin{pmatrix} -ai + c \\ -bi - c \\ ic \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} i^n & & \\ & i^n & \\ & & (-i)^n \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix}, & n = 1 \bmod 4 \\ \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, & n = 2 \bmod 4 \\ \begin{pmatrix} -i & & \\ & -i & \\ & & i \end{pmatrix}, & n = 3 \bmod 4 \\ I, & n = 0 \bmod 4 \end{cases}$$

$$[T]^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} -i & & \\ & -i & \\ & & i \end{pmatrix} P = [T^{-1}]$$

$i^1 = i$	$-i^1 = -i$
$i^2 = -1$	$(-i)^2 = 1$
$i^3 = -i$	$(-i)^3 = \cancel{4}\ i$
$i^4 = 1$	$(-i)^4 = 1$

$$[T]^{2013} = P^{-1}\begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix} P = [T]$$

$n>1$ א. $M_B=?$ ⑥

ב. $J_B=?$ $J=J_n(0)$

ג. הוכח $BJ=JB$ אך $\nexists P:\ P^{-1}JP,\ P^{-1}BP$ אלכסוניות. $B=J^2$

ד. $M_B(x)=?$

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix}\quad f_J(x)=x^n\quad M_J(x)=x^n$$

$$B=J^2=\begin{pmatrix}0&0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&\ddots&0\\0&&&&0\end{pmatrix}\quad f_B(x)=x^n\quad M_B(x)=\begin{cases}x^{\frac n2}, & n \text{ זוגי}\\ x^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ אי זוגי}\end{cases}$$

הסבר:

$$(b_{ij})=B=J^2:\ b_{ij}=\begin{cases}1, & j=i+2\\0, & o.w\end{cases}$$

$$(c_{ij})=B^2:\ c_{ij}=\begin{cases}1, & j=i+4\\0, & o.w\end{cases}$$

$\vdots$

$$(d_{ij})=B^m:\ d_{ij}=\begin{cases}1, & j=i+2m\\0, & o.w\end{cases}$$

$$B^{\frac{n-2}{2}}=(e_{ij})=B^{\frac{n-1}{2}}:\ e_{ij}=\begin{cases}1, & j=i+\frac{2(n-1)}{2}\\0, & o.w\end{cases}$$

כאשר $i=1$ $\Rightarrow$ $e_{1n}=e_{in}$ המקום

לכן המקום היחיד שבו אפשר יהיה

מתקיים ש- B^k כאשר

$$\begin{cases}k=\frac{n+1}{2}, & n \text{ אי זוגי}\\ k=\frac n2, & n \text{ זוגי}\end{cases}\qquad e_{ij}=\begin{cases}1, & j=i+\frac{2(n+1)}{2}>n\ \ \forall i=1,\dots,n\\0, & o.w\end{cases}$$

מתאפס.

ד. (i) ר"ג של 0 הוא 2 (iii) גדלי 2 בלוקים הם $\frac n2$, $\frac{n+1}{2}$

(ii) ר"א של 0 הוא n

לכן:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}J_{\frac n2}(0)&0\\0&J_{\frac n2}(0)\end{pmatrix}}_{n\text{ זוגי}}\qquad\underbrace{\begin{pmatrix}J_{\frac{n+1}{2}}(0)&0\\0&J_{\frac{n-1}{2}}(0)\end{pmatrix}}_{n\text{ אי זוגי}}$$

$$B = J^2 \Rightarrow BJ = J^2 J = J J^2 = JB$$

עבור J קיימת צורת ז'ורדן יחידה, כלומר קיימת צורת ז'ורדן

יחידה. J צורת ז'ורדן ⇐ היא הצורה של עצמה וגם:

רק עבור ה-I כי J^2 לא צורת ז'ורדן של B. $P^{-1}JP = I$

$$P^{-1}JP = J \ / \square$$

$$P^{-1}BP = J_B$$

$$P^{-1}BP = P^{-1}J^2P = J^2$$

סתירה

$V = R_2[x]$ .7

$$\langle a_1 + b_1x + c_1x^2, a_2 + b_2x + c_2x^2 \rangle = 4a_1a_2 + 2b_1b_2 + c_1c_2$$

א. הוכחה לינ

ב. מבנה פנים לינ.

א.

לינאריות ברכיב הראשון

$$\langle \alpha(a_1 + b_1x + c_1x^2) + \beta(a_2 + b_2x + c_2x^2), a_3 + b_3x + c_3x^2 \rangle =$$

$$\langle (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)x + (\alpha c_1 + \beta c_2)x^2, a_3 + b_3x + c_3x^2 \rangle =$$

$$4(\alpha a_1 + \beta a_2)a_3 + 2(\alpha b_1 + \beta b_2)b_3 + (\alpha c_1 + \beta c_2)c_3 =$$

$$\alpha(4a_1a_3 + 2b_1b_3 + c_1c_3) + \beta(4a_2a_3 + 2b_2b_3 + c_2c_3) =$$

$$\alpha\langle a_1 + b_1x + c_1x^2, a_3 + b_3x + c_3x^2 \rangle + \beta\langle \ldots \rangle$$

הרמיטיות/סימטריות כי שדה R:

$$\langle a_1 + b_1x + c_1x^2, a_2 + b_2x + c_2x^2 \rangle =$$

$$4a_1a_2 + 2b_1b_2 + c_1c_2 = 4a_2a_1 + 2b_2b_1 + c_2c_1 =$$

$$\langle a_2 + b_2x + c_2x^2, a_1 + b_1x + c_1x^2 \rangle.$$

א. חיוביות:

$$\langle a_1 + b_1x + c_1x^2, \overbrace{a_1 + b_1x + c_1x^2}^{P} \rangle = 4a_1^2 + 2b_1^2 + c_1^2 \geq 0$$

$$4a_1^2+2b_1^2+c_1^2=0 \Leftrightarrow a_1,b_1,c_1=0 \Leftrightarrow P=0$$

ג) $B=\left\{\frac{1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2}}, x^2\right\}$?

נורמה

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\left\langle \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right\rangle = 2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

$$\left\langle x^2, x^2\right\rangle = 1$$

אורתוגונליות

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle 1, x\right\rangle =0$$

$$\left\langle \frac{1}{2}, x^2\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle 1, x^2\right\rangle =0$$

$$\left\langle \frac{x}{\sqrt{2}}, x^2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle x, x^2 =0\right.$$

(8) V ממ"פ

$T: V \to V$ אופ' לינארי

$\mathcal{L}_T$ מפוצל

הוכח: קיים בסיס א"נ B של V כך ש- $[T]_B$ משולשית.

נגדיר $n=\dim V$.

$\mathcal{L}_T$ מפוצל ⇐ ל-T n ע"ע.

עפ"י משפט השילוש קיים בסיס $M=\{m_1,\dots,m_n\}$ כך ש- $[T]_M$ משולשית עם הע"ע באלכסון:

V ממ"פ ⇐ ניתן להפעיל תהליך ג.ש לקבלת בסיס א"נ $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ כך שלכל $k=1,\dots,n$ $sp\{m_1,\dots,m_k\}=sp\{b_1,\dots,b_k\}$

עבור:

$b_1 = m_1$

$[I]^B_M$ משולשי עליון ⇐ $b_2 = m_2 - proj(m_2,b_1)b_1$

$[I]^B_M$ משולשי $b_3 = m_3 - proj(m_3,b_1)b_1 - proj(m_3,b_2)b_2$ $\quad \mathcal{L}(m_1,m_2)$

$\vdots$

$$\Rightarrow [I]^B_M = \left((b_1)_M \cdots (b_n)_M\right) = \begin{pmatrix} 1 & proj & -proj & \\ 0 & 1 & -proj & \\ \vdots & 0 & 1 & \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

משולשי - עליון. ⇐ $\left([I]^B_M\right)^{-1}$ גם משולשי - עליון

ונקבל:

$$[T]^B_B = \left([I]^B_M\right)^{-1}[T]^M_M[I]^B_M = \text{משולשי עליון.}$$

(9) $v\in\mathbb{R}^3$ עמודה

$$A\in\mathbb{R}^{3\times 3}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ v & 5773v & 5774v \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

יש ע"ע $\neq 0$. הוכח A לכסינה.

עבור: באופן כללי $\begin{pmatrix} | & | & | \\ v & \alpha v & \beta v \\ | & | & | \end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\neq 0$ לכסין.

נגדיר $0\neq v=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ אחרת $A=0$ ואין ע"ע $\neq 0$.

$$A=\begin{pmatrix} a & \alpha a & \beta a \\ b & \alpha b & \beta b \\ c & \alpha c & \beta c \end{pmatrix}$$

$$f_A(x)=\begin{vmatrix} x-a & -\alpha a & -\beta a \\ -b & x-\alpha b & -\beta b \\ -c & -\alpha c & x-\beta c \end{vmatrix}=$$

$$(x-a)\left[\overset{x^2-(\alpha b+\beta c)x}{(x-\alpha b)(x-\beta c)}-\cancel{\beta\alpha bc}\right]$$

$$+b\left[\overset{-\alpha a x}{-\alpha a(x-\beta c)}-\cancel{\alpha\beta ac}\right]$$

$$-c\left[\cancel{\alpha a\beta b}+\overset{\beta a x}{\beta a(x-\alpha b)}\right]=x^3-(\alpha b+\beta c)x^2-ax^2=$$

$$x^2(x-\underbrace{(\alpha b+\beta c-a)}_{\neq 0\ \text{ע"ע}})$$

$\underline{x_{1,2}=0:}$ ר"א $=2$

ר"א $=1$ אז

$\Downarrow$

ר"ג $=1$

$(A-0I|\vdots)=$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ v & \alpha v & \beta v \\ | & | & | \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} | & | & | \\ v & 0 & 0 \\ | & | & | \end{pmatrix}\Rightarrow$$ ר"ג $=2$ $\Rightarrow$ $\boxed{A\ \text{לכסינה}}$

(10) V מ"ו

$S \subseteq V$

$S^\circ = \{\varphi \in V^* : \forall v \in S \ \varphi(v)=0\}$

$\forall \underset{\text{תמ"ו}}{U} \subseteq V \quad \dim U + \dim U^\circ = \dim V$

הוכח: $U,W \subseteq V$ תמ"ו $\Leftarrow (U\cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$

$\supseteq$: $\psi + \varphi \in U^\circ + W^\circ \Rightarrow$

$\psi \in U^\circ \wedge \varphi \in W^\circ \Rightarrow$

$\forall v \in U \ \psi(v)=0 \quad \wedge \quad \forall w \in W \ \varphi(w)=0$

בפרט $\qquad\qquad$ בפרט

$\forall v \in U\cap W \ \psi(v)=0 \qquad \forall w \in U\cap W \ \varphi(w)=0$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\psi \in (U\cap W)^\circ \qquad \varphi \in (U\cap W)^\circ$

$\square^\circ$ הוא תמ"ו

$\Downarrow$

$\psi + \varphi \in (U\cap W)^\circ$

⊛ הקצאה כי ניתן זה לפרק שווין מלמדים.

$\subseteq$: $\varphi \in (U\cap W)^\circ \Rightarrow$

$\forall v \in U\cap W \ \varphi(v)=0$

צריך $\varphi = f + g \in U^\circ + W^\circ$

כלומר

1) $\forall v \in U \ f(v)=0$

2) $\forall w \in W \ g(w)=0$

3) $\forall v \ \varphi(v) = f(v) + g(v)$

נגדיר $f,g \in V^*$ באופן הבא:

$$f(v) = \begin{cases} 0, & v \in U \setminus (U\cap W) \\ \varphi(v), & \text{o.w} \end{cases} \Rightarrow \forall v \in U \ f(v)=0 \Rightarrow f \in U^\circ$$

$$g(v) = \begin{cases} 0, & v \in W \setminus (U\cap W) \\ \varphi(v), & \text{o.w} \end{cases} \Rightarrow \forall v \in W \ g(w)=0 \Rightarrow g \in W^\circ$$

	$\varphi(v)$	$f(v)+g(v)$
$v\in U\cap W$	0	$0+0$
$v\in U\setminus(U\cap W)$	$\varphi(v)$	$0+\varphi(v)$
$v\in W\setminus(U\cap W)$	$\varphi(v)$	$\varphi(v)+0$

ולכן:

$\Rightarrow \varphi(v)=f(v)+g(v)$

$\Leftarrow \varphi\in U^0+W^0$

(ח) מצא ע"ע של A^tA כאשר $A=(a_1\cdots a_n)\in\mathbb{C}^{1\times n}$.

פתרון: ידוע ש- $\operatorname{rank}AB\le \operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B$

לכן $\operatorname{rank}A^tA\le\operatorname{rank}A\le 1$

$n=1$ ישר?

$n>1$

$\Downarrow$

A לא הפיכה

$\Downarrow$

ע"ע 0

$$\underset{\underset{n-1}{\vee\!\!|}}{\dim Null(A^tA)}+\underset{\underset{1}{\wedge\!\!|}}{\operatorname{rank}(A^tA)}=n$$

$\dim Null\,A^tA=\dim Null(A^tA-0I)=($ר"ג של $0)\ge n-1$

$\Downarrow$

ר"א של $0\ge n-1$

לכן

$$f_{A^tA}(x)=x^{n-1}(x-\lambda)=x^n-\lambda x^{n-1}$$

$\Downarrow$

$$\lambda=tr(A^tA)=\sum a_i^2$$

כלומר ל-A^tA ע"ע 0 עם ריבוי $n-1$

כאשר קיים i כך ש- $a_i\neq0$, אז

הע"ע הנותר הוא $\sum a_i^2$. ע"ע 0

הוא עם ריבוי n כאשר $a_i=0$ $\forall i$.

במקרה, אם $n=1$ אז a_1^2 הוא ע"ע

היחיד הוא $0 \Leftrightarrow a_1=0$.

וקטור עצמי:

$$\begin{pmatrix}\sum a_1a_jv_j\\ \vdots\\ \sum a_na_jv_j\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\Rightarrow$$

אם נבחר $v_j=a_j$

לכל j נקבל

$$\begin{pmatrix}\sum a_1a_j^2\\ \vdots\\ \sum a_na_j^2\end{pmatrix}=\sum a_i^2\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_i\end{pmatrix}$$

~~[illegible]~~ לשימושי מימון? יצר השאלה ה P.O.

(12) V ממ"פ מעל F

$T: V \to V$ אופ' נורמלי

א. הוכח: אם $v \in V$ ו"ע מתאים ל $\lambda \in F$ כך ש $Tv = \lambda v$ מתקיים: $T^* v = \bar{\lambda} v$

ב. הוכח: לכל $\lambda \in F$ גם $(V_\lambda)^\perp$ הוא T-אינו'.

פתרון:

א. $\|Tv\| = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^* T v \rangle = \langle v, T T^* v \rangle$

$= \langle T^* v, T^* v \rangle = \|T^* v\|$

v ו"ע של T עם ע"ע λ <=>

$Tv = \lambda v \iff (T - \lambda I) v = 0 \iff \|(T - \lambda I) v\| = 0$

נסתכל על

$$\|(T^* - \bar{\lambda} I) v\| = \|(T - \lambda I)^* v\| = \|(T - \lambda I) v\| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(T^* - \bar{\lambda} I) v = 0 \iff \boxed{T^* v = \bar{\lambda} v}$$

ב. ($T|_W : W \to W$ T-אינו' אם $\forall w \in W$ $Tw \in W$)

צריך $Tv \in V_\lambda^\perp$ $\forall v \in (V_\lambda)^\perp$ $\quad v \perp V_\lambda \iff \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in V_\lambda$

$\langle T(v), u \rangle = \langle v, T^* u \rangle = \langle v, \bar{\lambda} u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0$

ג. הגדר אופ' אוניטרי

ב. הוכח כי ערך מוחלט של כל ע"ע של אופ' אוניטרי הוא 1.

ג. A אוניטרית, $(A-I)^3=0$. הוכח ש־A יחידה

<u>פתרון:</u>

א. $T:V\to V$ אופ' לינארי

$\Downarrow$

T אוניטרי $\Leftrightarrow T^*T=I$

ב. $\bar\lambda$ ע"ע של T^* $\Leftrightarrow$ λ ע"ע של T עם אותו וקטור

כמו כן

λ ע"ע של $T \Leftrightarrow \lambda^{-1}$ ע"ע של T^{-1} עם אותו וקטור

לכן אם $T^*=T^{-1}$ אז לכל וקטור אחד הע"ע היחיד המתאים לו הוא $\bar\lambda$, ולכן שני הע"ע היחידים המתאימים לו הוא λ^{-1} לכן

$\bar\lambda=\lambda^{-1} \; / \cdot\lambda$

$\boxed{|\lambda|=1}$

ג. $A-I$ נילפ' עם סדר $k\le 3$,

$\Downarrow$

0 ע"ע יחיד של $A-I \Leftrightarrow$ רק הוא מאפס את $|A-I-\lambda I| \Leftrightarrow |A-I|=0 \Leftrightarrow$ 1 רק מאפס את $|A-\lambda I| \Leftrightarrow$ רק 1 ע"ע של A

לכן:

$$f_A(x) = (x-1)^n g(x)$$

לא פריק

לכן שורש.

$$M_{A-I} = x^k \Rightarrow M_A = (\lambda-1)^k \Rightarrow f_A = (x-1)^n$$

כי זו החזקה המינימלית ש־ מאפס

A ־אז

וכל מספר נוסף

יותר ־k ההרבה

A אין לה ע"ע ־ $A \Leftarrow$ נותנת־ $A \Leftarrow$ לכסינה

ע"ע מלבד f_A ־1

$$\Downarrow$$

$$A = P^{-1} I P = I \Rightarrow \boxed{A^{2010} = I}$$