בוחן אלגברה לינארית למהנדסים

12.1.2015 , כ"א טבת תשע"ה

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- **כיתבו כל תשובה בדף של השאלה. על כל דף רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

מבנה הבחינה:
שאלה 1 - 8 שאלות נכון/לא נכון. 5 נקודות לכל שאלה (סה"כ $5 \times 8 = 40$ נקודות)
שאלה 2+3 - שאלות פתוחות. כל שאלה 30 נקודות.

הערה: הסימון $N(A), C(A), R(A)$ מסמנים את מרחב השורות, עמודות, האפס של A בהתאמה.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

חלק א׳- שאלות נכון/לא נכון (ללא נימוק, כל סעיף 5 נקודות)

סמן נכון או לא נכון

1. נגדיר

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3}\,|\,x+y=z\,\wedge\,x+2y=z\right\}\subseteq\mathbb{R}^{3}$$

טענה: W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$

נכון/ לא נכון

פתרון: נכון. זה מרחב הפתרונות למערכת משוואות לינארית הומוגונית

2. נגדיר

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\,|\,x_1=-x_2\right\}\subseteq\mathbb{R}^{2\times 2}$$

טענה: W תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$

נכון/ לא נכון

פתרון: נכון. זה מרחב הפתרונות למערכת משוואות לינארית הומוגונית

3. נגדיר

$$W=\left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\,|\,\mathrm{trace}(A)=1\right\}\subseteq\mathbb{R}^{n\times n}$$

טענה: W תת מרחב של $\mathbb{R}^{n\times n}$

נכון/ לא נכון

פתרון: לא נכון. מטריצת האפס העקבה שלה =0

4. יהא V מ"ו. תהא S קבוצה פורשת של V. אזי בהכרח $0\notin S$

נכון/ לא נכון

פתרון: לא נכון. למשל V הוא קבוצה פורשת של עצמו ו $0\in V$

5. יהא V מ"ו . תהא $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ קבוצה פורשת של V. אזי בהכרח $S'=\{v_1,v_2,v_1+v_3\}$ גם כן קבוצה פורשת את V

נכון/ לא נכון

פתרון: נכון. יהא $v\in V$ לפי נתון קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=v$

ולכן גם $(\alpha_1-\alpha_3)v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3(v_1+v_3)$ הוא צ"ל של איברי S' ששווה ל v

6. יהא V מ"ו . תהא $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ קבוצה בת"ל. נגדיר

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1+2v_2-v_3\\ w_2 &= v_2-v_3\\ w_3 &= v_1+v_2\end{aligned}$$

טענה: בהכרח $\{w_1,w_2,w_3\}$ גם כן בת"ל

נכון/ לא נכון

פתרון: לא נכון. נניח כי $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0$ צ"ל $\forall i : \alpha_i = 0$
מההנחה נקבל כי $(\alpha_1 + \alpha_3)v_1 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v_2 + (-\alpha_1 - \alpha_2)v_3 = 0$
כיוון ש S בת"ל נקבל כי

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

כלומר השאלה שקולה האם למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

יש פתרון לא טרויאלי. זה אכן כך כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון לא טרויאלי לדוגמא הוא

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ואכן גם אפשר לראות ישירות כי

$$w_1 = w_2 + w_3$$

7. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי

$$C(A) = \{0\} \Rightarrow A = 0$$

נכון/ לא נכון
פתרון: נכון. כי אם $A \neq 0$ אז קיימת לה עמודה שלא כולה אפסים. עמודה זאת שייכת ל $C(A)$

8. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי

$$N(A) = \{0\} \Rightarrow A = 0$$

נכון/ לא נכון
פתרון: לא נכון. למשל I

חלק ב־ שאלות פתוחות והוכחות

1. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

(א) (20 נקודות) מצא מימד ובסיס של $C(A), R(A), N(A)$

פתרון: קל לראות כי השורות של $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ בת"ל (המטריצה מדורגת) ולכן מימד השורות של Aלפחות 4

כיוון של A יש עמודת אפסים המימד של מרחב העמודות לכל היותר 4 .

כיוון שמימד מרחב השורות = מימד מרחב העמודות נקבל כי שניהם שווים 4.

כבסיס למרחב העמודות ניתן לקחת את 4 העמודות הראשונות (הם בודאי בת"ל כי אחרת מימד מרחב העמודות יהיה פחות מ־4)

כבסיס למרחב השורות ניתן לקחת את 4 השורות הראשונות.

לפי המשפט $\dim C(A) + \dim N(A) = 5$ נקבל כי המימד של מרחב האפס שווה ל־1 .

קל לראות כי $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ מוכל במרחב האפס ולכן הוא בסיס (לפי משפט שלישי חינם)

(ב) (15 נקודות) נגדיר את הקבוצה

$$W = \left\{ B \in \mathbb{R}^{4\times 5} \middle| \, R_1(BA) = (0,0,0,0,0) \right\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 5}$$

הוכח כי W תת מרחב של $\mathbb{R}^{4\times 5}$ ומצא את המימד שלו (הערה: הסימון $R_1(BA)$ פירושו השורה הראשונה של BA, המטריצה A היא המטריצה מסעיף קודם)

פתרון: מטריצת האפס מקיימת את התנאי ולכן שייך ל W.

בנוסף: יהיו $B_1, B_2 \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אזי

$$R_1([\alpha B_1 + B_2]A) = R_1(\alpha B_1 A + B_2 A) = R_1(\alpha B_1 A) + R_1(B_2 A) = \alpha R_1(B_1 A) + R_1(B_2 A) = \alpha 0 + 0 = 0$$

המעברים אחד לפני האחרון נובע מהגדרת W ומכך ש B_1, B_2 שייכים ל W.

המימד שלו 15+1 . למה?

כיוון ש $R_1(BA) = R_1(B)A$ נקבל כי

$$\left\{ R_1(B) \in \mathbb{R}^{1\times 5} \middle| \, R_1(BA) = (0,0,0,0,0) \wedge B \in \mathbb{R}^{4\times 5} \right\}$$

היא בעצם מרחב האפס השמאלי של A. כיוון שהמימד של מרחב השורות = 4 אזי מימד האפס השמאלי שווה 1. נסמן את הבסיס שלו ב $\{v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\}$

ואז קבוצה פורשת של W היא

$$B=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\end{pmatrix}, E_{i,j}\,|\,i=2,3,4.\,j=1,2,3,4,5\right\}$$

כאשר $E_{i,j}$ היא מטריצה שיש לה 1 במקום ה i,j ואפסים בכל השאר.
קל לראות כי B היא גם בת"ל ולכן בסיס

2. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הוכח כי

(א) (10 נקודות) $N(A)\subseteq N(A^2)$ וגם $C(A^2)\subseteq C(A)$
פתרון: יהא $x\in N(A)$ אזי $Ax=0$ ולכן גם $A^2x=A(Ax)=A0=0$ ולכן $x\in N(A^2)$
יהא $x\in C(A^2)$ אזי קיים y כך ש $A^2y=x$ נסמן $z=Ay$ ואז $Az=x$ ולכן $x\in C(A)$

(ב) (15 נקודות) $N(A^2)=N(A) \iff C(A^2)=C(A)$ (יש שימצאו קשר בין הסעיפים..)
פתרון: A^2 ג"כ מטריצה ולכן מתקיים כי

$$\dim C(A^2)+\dim N(A^2)=n=\dim C(A)+\dim N(A)$$

כלומר

$$\dim N(A^2)-\dim N(A)=\dim C(A)-\dim C(A^2)$$

כעת

$$C(A^2)=C(A) \iff \dim C(A)-\dim C(A^2)=0 \iff \dim N(A^2)-\dim N(A)=0 \iff N(A^2)=N(A)$$

כלומר קיבלנו כי

$$\dim C(A)=\dim C(A^2) \iff \dim N(A^2)=\dim N(A)$$

מההכלות של סעיף קודם נקבל כי

$$C(A)=C(A^2) \iff N(A^2)=N(A)$$