תרגיל 5 - פתרון

שאלה 1

יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ותהי $F(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{[a_j,\infty)}(x)$.

(1) תארו את מידת סטילטיס μ_F המתאימה ע"י F הנ"ל.

פתרון: נשים לב כי F פונקציית מדרגות עולה, עם בדיוק n קפיצות בגובה $1+$ בנקודות: $a_1, \dots, a_n$.

לכן, לכל קטע $I=(a,b]\subseteq\mathbb{R}$

$$\mu_F(I) = F(b)-F(a)$$

$= \underset{\text{מספר הקפיצות}}{\text{של } F \text{ ב-} I} = \#(I\cap\{a_1,\dots,a_n\}) = \left(\sum_{k=1}^{n}\delta_{a_k}\right)(I)$

ומכיון שההגדרה על האלגברה קובעת ביחידות את μ_F, קיבלנו:

$$\mu_F = \sum_{k=1}^{n}\delta_{a_k}$$

(2) מיהן הקבוצות $A\subseteq\mathbb{R}$ המדידות $\mathcal{S}_F$?

פתרון: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$.

$A\cap\{a_1,\dots,a_n\}$ הינה אלמנטרית כאיחוד סופי או ריק של סינגלטונים (מנוונים)

וכן:

$$0 \le \rho(A, A\cap\{a_1,\dots,a_n\}) = \mu_F^*(A\setminus\{a_1,\dots,a_n\}) \le \mu_F(\mathbb{R}\setminus\{a_1,\dots,a_n\}) = 0$$

קיבלנו כי A קרובה - ρ כרצוננו לקב' אלמנטרית ולכן

A מדידה-μ_F.

וזאת לכל $A\subseteq\mathbb{R}$. לכן: $\mathcal{S}_F = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(3) מיהן הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המדידות-$\mathcal{S}_F$?

פתרון: מתרגיל 4 הנחתם שבמקרה זה - כאשר הס-אלגברה היא הדיסקרטית - כל פונקציה היא מדידה.

(4) חשבו את האינטגרלים:

$$\int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mu_F$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu_F .$$

<u>פתרון:</u>

$$\int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mu_F = \mu_F(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_k}(\mathbb{R}) = n$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu_F \underset{\substack{\text{אדטיביות} \\ \text{האינטגרל}}}{=} \int_{\mathbb{R}\setminus\{a_1,\dots,a_n\}} x^2 \, d\mu_F + \sum_{k=1}^{n} \int_{\{a_k\}} x^2 \, d\mu_F$$

$$\underset{\mu_F(\mathbb{R}\setminus\{a_1,\dots,a_n\})=0}{=} 0 + \sum_{k=1}^{n} \int_{\{a_k\}} a_k^2 \, d\mu_F$$

$$\underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \int_{\{a_k\}} d\mu_F = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \underbrace{\mu_F(\{a_k\})}_{=1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 .$$

שאלה ב

יהי $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ממ"ח סופית ויהיו f,g פונקציות ממשיות מדידות.

הוכיחו / הפריכו:

אם לכל $E\in\mathcal{A}$: $\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu$ אזי $f\sim g$.

<u>פתרון:</u> הוכחה -

נניח בשלילה כי לכל $E\in\mathcal{A}$ $\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu$

<u>וגם</u> $f\not\sim g$, כלומר - קיימת $E\in\mathcal{A}$ כך ש $0<\mu(E)$

ולכל $x\in E$ $f(x)\neq g(x)$.

נשים לב: $E=[f\gneq g]\cup[g\gneq f]$, לכן, מאדיטיביות μ

נבחר אחת מהקבוצות באגף ימין בעלת מידה (μ-) <u>חיובית</u>.

נניח, בה"כ, שמדובר ב $A:=[f\gneq g]$: $\mu(A)>0$ (אחרת, ההוכחה סימטרית).

אזי לכל $x\in A$ $0\lneq f(x)-g(x)$ (*)

ולפי ההנחה $\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu$

כלומר (מלינאריות האינטגרל וחיוביות $f-g$): $\int_A |f-g|\,d\mu=0$

ולכן $|f-g|=f-g=0$ כמעט לכל $x\in A$

בסתירה ל(*) יחד עם ש-$\mu(A)>0$.

לכן אם $\int_E f=\int_E g$ לכל E מדידה, אזי: $f\sim g$

שאלה 3

נוכיח כעת.

משפט ערך האינטגרלי - עבור אינטגרל לבג.

$(X,\mathcal{A},\mu)$ מ״מ.

תהי $f:X\to\mathbb{R}$ מדידה - $\mathcal{A}$ כך ש- $c\le f(x)\le C$ לכל $x\in X$

ותהי $g:X\to\mathbb{R}_+$ אינטגרבילית ב X.

אזי קיים $a\in\mathbb{R}$ $c\le a\le C$ כך ש-

$$\int_X fg\,d\mu = a\int_X g\,d\mu$$

הוכחה: נסמן $M=\int_X g\,d\mu$ אזי $0\le M<\infty$ (כי $g\ge 0$ ואינטגרבילית).

לפי מונוטוניות האינטגרל (ביחס לפונקציה):

$$(*)\quad cM \overset{\text{לינאריות}}{=} \int_X cg\,d\mu \le \int_X fg\,d\mu \le \int_X Cg\,d\mu \overset{\text{לינאריות}}{=} CM$$

מכאן:

אם $M=0$ אזי $g=0$ כמ״ה והשוויון יתקיים לכל $a\in X$.

נניח $M\neq 0$ אזי נוכל לחלק את שני האגפים ב $(*)$ ב M ונקבל:

$$c\le \frac{1}{M}\int_X fg\,d\mu \le C.$$

נגדיר: $a:=\frac{1}{M}\int_X fg\,d\mu.$ אזי $c\le a\le C$

ולכן

$$\int_X fg\,d\mu = aM = a\int_X g\,d\mu.$$

כנדרש.

$(X,\mathcal{A},\mu)$ מ.מ

שאלה 4: נניח $f_n(x) \xrightarrow{a.e.} 0$ (מדידות) וגם $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = 0$

האם בהכרח קיימת g אינטגרבילית כך ש- $f_n \le g$ לכל n?

פתרון: לא! דוגמא נגדית:

נ- $(\mathbb{R}, \Sigma, m)$ - מרחב מידת לבג הסטנדרטי

נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1/n & n-1 \le x < n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

קל לראות כי $f_n \longrightarrow 0$ (בכל נקודה)

וגם $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n} \to 0$

נניח כי g מדידה ו- $f_n \le g \quad \forall n$

אז $\forall n: \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm \le \int_{\mathbb{R}} g \, dm$. לפי מונוטוניות האינטגרל

ולכן:

$$\int_{\mathbb{R}} |g| \, dm \ge \int_{\mathbb{R}} g \, dm \overset{\sigma \text{ אדיטיביות } \mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} g \, 1_{[n-1,n)} \, dm \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n 1_{[n-1,n)} \, dm$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$$

קיבלנו כי g אינה אינטגרבילית.

לכן - לא קיים g אינטגרבילית כך ש- $f_n \le g$ לכל n

במקרה זה.