

מבנים אלגבריים7 תרגיל

נא לרשום על כל תרגיל בבירור שם ת.ז. ואת קבוצת התרגיל המתאימה

1. (א) ידוע ש- Z_5 הוא שדה. הוכיחו שהסדר של החבורה $GL_n(Z_5)/SL_n(Z_5)$ הוא 4.
(ב) הוכיחו שלא קיים הומומורפיזם על $f: Z_{20} \rightarrow S_3$.
2. (א) נניח שקיים הומומורפיזם מחבורה מסדר 12 לחבורה מסדר 15. מהם הסדרים האפשריים של התמונה?
(ב) הוכיחו שאפימורפיזם בין שתי חבורות ציקליות מעביר יוצר ליוצר.
(ג) מהו מספר ההומומורפיזמים מחבורה ציקלית G מסדר 12 לחבורה ציקלית H מסדר 15?
3. נסתכל על $g = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ ב- S_5 . נגדיר את $f: Z \rightarrow S_5$ על ידי $f(n) = g^n$.
(א) הוכיחו ש- f הומומורפיזם.
(ב) מצאו את $\ker(f)$.
(ג) מצאו את הסדר של $\text{Im}(f)$ מבלי לחשב אותו ישירות.
4. (א) נסתכל על S_6 . הוכיחו שהקבוצה הבאה: $A = \{\sigma \in S_6 : \sigma(4)=4\}$ היא תת-חבורה. האם היא תת-חבורה נורמלית?
(ב) נסתכל על S_3 ועל $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$. למה $H \triangleleft S_3$?
יהיו $a = (1\ 2)$, $b = (2\ 3)$ שני איברים ב- S_3 . הראו ש- $aH = bH$ ולכן aH, bH הם אותו איבר ב- S_3/H (למרות ש- a שונה מ- b).
(ג) הוכיחו או הפריכו: הקבוצה $A = \{a \in S_n : a^2 = \text{Id}\}$ היא תת חבורה לכל n .
5. (א) מהו המספר של התמורות מהצורה $(ab)(cd)$ ב- S_n כאשר (ab) ו- (cd) חילופים זרים?
(ב) כמה איברים ב- S_{10} מקיימים את המשוואה: $x^3 = \text{Id}$?
6. מצא כמה מחלקות צמידות יש ב- S_6 ורשום נציג לכל מחלקה.
7. תהי $V = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq A_4$.
א. הוכיחו כי V תת-חבורה נורמלית של A_4 .
ב. הוכיחו כי A_4/V חבורה ציקלית.
8. הראה כי אם התת חבורות H_1, H_2 צמודות אז גם המנרמלים שלהן צמודים.

בהצלחה!