תרגול אינפי 3 - תש"פ

1 התכנסות סדרות ב $\mathbb{R}^n$.

משפט 1.1. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל a ב $\mathbb{R}^m$ אם ורק אם היא מתכנסת רכיב רכיב.

צורת רישום. נסמן על ידי a_n^i את הקואורדינטה ה i של a_n. כלמר: אם $a_n = (x_1, \ldots, x_m)$ אזי $a_n^i = x_i$.

הוכחה. ($\Longleftarrow$)נניח ש $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. מכיוון שנורמת מקסימום והנורמה הסטנדרטית הן שקולות, $\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\|_\infty = 0$. לכן,

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{\left|a_n^i - a^i\right| 1 \le i \le m\right\} = 0 \, .$$

ולכן לכל $1 \le i \le m$, $\lim_{n\to\infty} \left|a_n^i - a^i\right| = 0$.
($\Longrightarrow$) נניח ש $\lim_{n\to\infty} \left|a_n^i - a\right| = 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} \max\left\{\left|a_n^i - a\right| |1 \le i \le n\right\} = 0$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0 \, .$$

□

תרגיל 1.2. הראו שהסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל $(e,1)$.

פתרון. הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת ל e ו $\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ל 1 והטענה נובעת מהמשפט שהוכחנו.

הגדרה 1.3. יהי (X,d) מרחב מטרי. נאמר ש $\{a_n\}$ היא סדרת קושי, אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $0 < m$, כך שאם $m < n, n'$, אזי $d\left(a_n, a_{n'}\right) < \epsilon$.

משפט 1.4. יהי (X,d) מרחב מטרי. אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ל מתכנסת $a \in X$ אם ורק אם היא סדרת קושי.

הערה 1.5. הכיוון השני לא בהררח נכון. אם ניקח $\mathbb{Q}$, ונבחר סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתמכנסת ל $\sqrt{2}$, נקבל סדרת קושי כי היא סדרה מתכנסת ב $\mathbb{R}$ ולכן גם סדרת קושי ב $\mathbb{Q}$. מצד שני היא לא מתכנסת ב $\mathbb{Q}$, מכיוון ש $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי.

הגדרה 1.6. מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת, נקרא מרחב מטרי שלם.

דוגמה. $\mathbb{R}$ הוא מרחב מטרי שלם, כמו שהוכחתם באינפי 1. סדרה ב $\mathbb{R}^n$ מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

על ידי שימוש בשלמות של הממשיים ותנאי להתכנסות על סדרות ב $\mathbb{R}$ מקבלים את המשפט על שלמות של $\mathbb{R}^n$.

משפט 1.7. $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב שלם.

הוכחה. תהי $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שאם $m < m_1, m_2$ אזי,

$$\|a_{m_1} - a_{m_2}\| < \epsilon \ .$$

אבל אז היא גם סדרת קושי ביחס לנורמת מקסימום, מפני שמתקיים

$$\|a_{m_1} - a_{m_2}\|_2 < \epsilon \implies \|a_{m_1} - a_{m_2}\|_{\max} < \epsilon \ .$$

אבל

$$\begin{aligned} \|a_{m_1} - a_{m_2}\|_{\max} < \epsilon \implies \\ \max\left\{\left|a^i_{m_1} - a^i_{m_2}\right| \middle| 1 \le i \le n\right\} < \epsilon \implies \\ \forall i : 1 \le i \le n \ \left|a^i_{m_1} - a^i_{m_2}\right| < \epsilon \end{aligned}$$

ולכן $\left\{a^i_m\right\}$ סדרת קושי לכל $1 \le i \le n$ ולכן מתכנסת לכל i. ז"א שהסדרה מתכנסת רכיב ולכן מתכנסת, כנדרש. $\square$

הערה. בגדול, חקירת התכנסות ב $\mathbb{R}^n$ מצטמצמת לחירת התכנסות לכל רכיב בנפרד היא פשוט חקירת התכנסות ב $\mathbb{R}$. יחד עם זאת, העובדה ש $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב נורמי שלם, לעיתים מאד שימושית.

2 נקודות הצטברות ונקודות מבודדות

הגדרה 2.1. יהי (X, d) מרחב מטרי ויהי $A \subseteq X$. נאמר ש $p \in X$ היא נקודת הצטברות של A אם לכל $0 < r$ קיים $a \in A$ כך ש $0 < d(a, p) < r$.

צורת רישום. אוסף של כל הנקודות הצטברות של A יסומן על ידי A'.

המשפט הבא, נותן לעיתים תיאור נוח יותר לנקודות הצטברות.

משפט 2.2. יהי (X, d) מרחב מטרי ו $A \subseteq X$. אזי מתקיים:

א. $p \in X$ היא נקודת הצטברות של A אם ורק אם כל סביבה N של p מתקיים

$$|N \cap A| = \infty \ .$$

(כל סביבה של p מכילה אינסוף נקודת של A).

ב. $p \in X$ היא נקדות הצטברות של A אם ורק אם קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב $A \setminus \{p\}$ כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. (קיימת סדרה של איברים ב A שמתכנסת ל p, כך שכל איבר בסדרה שונה מ p.

דוגמה 2.3. 1 היא נקודת הצטברות של $(0,1)$, מכיוון שכל $\epsilon > 0$ קיים $1-\epsilon < x < 1$ ומקתיים

$$|1-x| = 1-x > 1-(1-\epsilon) = \epsilon .$$

תרגיל 2.4. הראו, שאוסף כל נקודות ההצטברות של $\mathbb{Z}$ הוא $\emptyset$.

פתרון. יהי $x \in \mathbb{R}$. אזי הקטע $B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$ מכיל לכל היותר מספר שלם יחיד, ולכן לא נק' הצטברות של $\mathbb{Z}$ על פי המשפט שציטטנו.

תרגיל 2.5. תהי $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהי $x \in S$ נקודה פנימית. הראו ש x היא נקודת הצטברות של x.

פתרון. תהי $x \in S$ נקודה פנימית. אזי קיים r כך ש $B(x,r) \subseteq S$. ברור שלכל $q < r$, $B(x,q) \subseteq B(x,r) \subseteq S$ וברור שכל כדור פתוח ב $\mathbb{R}^n$ היא קבוצה אינסופית. לכן לכל סביבה N של x, ניקח כדור פתוח ברדיוס $q < r$ שמוכל ב N, והוא מכיל אינסוף נקודות של S, ז"א ש N מכילה אינסוף נק' של S וסיימנו על פי המשפט.

תרגיל 2.6. מצאו את כל נק' הצטברות של $S = \{(p,q) \,|p,q \in \mathbb{Q}\}$ ב $\mathbb{R}^2$.

פתרון. נראה, שקבוצה נק' ההצטברות של S ב $\mathbb{R}^2$ היא כל $\mathbb{R}^2$. תהי $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ויהי $B((x,y),r)$ כדור פתוח ברדיוס r סביב (x,y). על פי שקילות של נורמת ∞ ונורמת 2, קיים r' כך ש

$$B_\infty((x,y),r') = [x-r', x+r'] \times [y-r', y+r'] .$$

קיים מספר רציונלי $x < p < x+r', y < q < y+r'$ וכן מתקיים

$$0 < \|(x,y)-(p,q)\|_2 < r .$$

מפני ש $[x-r', x+r'] \times [y-r', y+r'] \subseteq B((x,y),r)$ ו $(x,y) \neq (p,q)$.

דוגמה 2.7. מצאו את כל נק' הצטברות של $\overline{B}(0,1)$ ב $\mathbb{R}^n$.

פתרון. ראינו, שכל נקודה פנימית של $\overline{B}(0,1)$ היא נקודת הצטברות, על כן, כל נקודה של $B(0,1)$ היא נקודה פנימית של $\overline{B}(0,1)$ ולכן נק' הצטברות שלה. נראה, שכל נק' שמקיימת $\|x\| = 1$ היא גם נק' הצטברות של $\overline{B}(0,1)$. תהי x כך ש $\|x\| = 1$. אזי לכל $0 < \epsilon$ מתקיים

$$\left\| x - \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) x \right\| = \frac{\epsilon}{2} \|x\| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

ומצד שני $\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) x \in \overline{B}(0,1)$ כי

$$\left\| \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) x \right\| = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \|x\| = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) < 1$$

ו $\|x\|$ היא נקודת הצטברות של $\overline{B}(0,1)$ על פי הדדרת נקודת הצטברות.

ראינו כמה דוגמאות לנק' הצטברות וראינו, שנק' הצטברות של A היא לא בהכרח איבר של A. נשאלת השאלה: אילו קבוצות מכילות את נק' הצטברות שלהן?

משפט 2.8. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $S\subseteq X$. אזי S סגורה אם ורק אם S מכילה את כל נק' ההצטברות שלה.

תרגיל 2.9. הראו ש $\mathbb{Z}$ היא קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}$.

פתרון. ראינו, שאוסף כל נק' הצטברות של $\mathbb{Z}$ הוא $\emptyset$, $\emptyset\subseteq\mathbb{Z}$ ולכן $\mathbb{Z}$ סגורה על פי המשפט שהבאנו.

האיפיון של נקודות הצטברות על ידי גבולות של סדרות נותן לנו אפיון שהוא לעיתים נוח יותר לעבוד איתו.

למה 2.10. יהי (X,d) מרחב מטרי. אזי $A\subseteq X$ היא קבוצה סגורה ב X , אם ורק אם לכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ של איברים ב A, אם $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ אזי $a\in A$.

הוכחה. ($\Longleftarrow$)נניח בשלילה, שהטענה אינה נכונה. אזי קיימת סדרה מתכנסת $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב A, כך ש $\lim_{n\to\infty}a_n=x$ ו $x\notin A$. אזי a היא נקודת הצטרות של A. אחרת, קיים r כך שלכ)ל $a\in A$, $x\neq a$

$$d\left(x,a\right)\geq r.$$

מצד שני $x\notin A$ על פי הנחת השלילה, ולכן $d\left(x,a\right)<r$ אזי $a\notin A$ בשילה להנחה ש $\lim a_n=x$. מצד שני אם $x\in A'$, מהסגירות של A נובע ש $A'\subseteq A$ ולכן $x\in A'$.

($\Longrightarrow$) מספיק להראות ש A מכילה את כל הנק' הצטברות שלה. תהי p נקודת הצטברות של A. אזי קיימת סדרה $\{a_n\}\subseteq A\setminus\{p\}$ כך ש $\lim_{n\to\infty}a_n=p$, אזי על פי ההנחה, $p\in A$. $\square$

תרגיל 2.11. הראו שהקבוצה

$$S=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\cos\left(xyz\right)>\frac{1}{2}\right\}$$

היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^3$.

פתרון. נראה, ש $\mathbb{R}^3\setminus S=\left\{(x,y,z)\,|\,\cos\left(xyz\right)\leq\frac{1}{2}\right\}$ היא קבוצה סגורה.

תהי (a_n,b_n,c_n) סדרה מתכנסת ב S כך ש $\lim_{n\to\infty}\left(a_n,b_n,c_n\right)=\left(a,b,c\right)$. נראה, ש $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus S$.

מכיוון ש (a_n,b_n,c_n) מתכנסת ל (a,b,c) היא מתכנסת רכיב, רכיב ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b,\ \lim_{n\to\infty}c_n=c$$

ולכן מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_nc_n=abc\,.$$

מכיוון ש $\cos$ היא פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(a_nb_nc_n\right)=\cos\left(\lim_{n\to\infty}a_nb_nc_n\right)=\cos\left(a,b,c\right)\leq\frac{1}{2}$$

מפני שלכל $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}\setminus S$ מתקיים $\cos\left(a_nb_nc_n\right)\leq\frac{1}{2}$ ולכן $\mathbb{R}^3\setminus S$ היא סגורה, ובאופן שקול, S פתוחה, כנדרש.

טענה 2.12. יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $A\subseteq X$ ויהי A' אוסף הנק' הצטברות שלה. אזי A' היא קבוצה סגורה.

הוכחה. נראה, שאם $a\in(A')'$ אזי $x\in A'$. נניח ש x היא נקודת הצטברות של A'. אזי לכל $r>0$ קיים $x\neq y\in A'$ כך ש $y\in B(x,r)$. מכיוון ש $B(x,r)$ היא קבוצה פתוחה, קיים r' כך ש $B(y,r')\subseteq B(x,r)$ ו $x\notin B(y,r')$ (לכל $\rho<r'$, $B(y,\rho)\subseteq B(y,r')$ ונוכל לבחור r', $\rho<d(x,y)$ ולהחליף את r' על ידי ρ במידה ו $d(x,y)<r'$). מצד שני, אם $y\in A'$, אזי על פי ההגדרה y היא נקודת הצטברות של A וקיים $a\in A\cap B(y,r')$. על פי הבחירה של r', $x\notin B(y,r')$ ולכן $a\neq x$. מצד שני $a\in B(y,r')\subseteq B(x,r)$, והראנו שכל כדור פתוח סביב y מכיל $x\neq a\in A\cap B(x,r)$ ולכן x היא נקודת הצטברות על פי ההדגדרה. $\square$

הגדרה 2.13. יהי (X,d) מרחב מטרי ו $S\subseteq X$. נאמר ש $s\in S$ נקודה מבודדת, אם קיים $r>0$ כך ש $B(s,r)\cap S=\{s\}$.

דוגמה 2.14. כל נקודה של $\mathbb{Z}$ היא נקודה מבודדת, שכן לכל $m\in\mathbb{Z}$, $B(m,1)\cap\mathbb{Z}=\{m\}$.

תרגיל 2.15. יהי (X,d) מרחב מטרי ו $S\subseteq X$. הראו ש $s\in S$ היא נקודה מבודדת אם ורק אם היא לא נק' הצטברות.

פתרון. נניח ש $s\in S$ נק' מבודדת. אזי קיים $r>0$ כך שלכל $S\cap B(s,r)=\{s\}$ ואינה אינסופית, בסתירה למשפט שאומר שכל סביבה של נק' הצטברות מכילה אינסוף איברי S. עכשיו נניח ש S אינה נקודת הצטברות. אזי קיימת סביבה N של s כך ש $S\cap N<\infty$. אם $S\cap N=\{s\}$ אז סיימנו, מפני שכל כדור $B(s,r)$ שמוכל ב N מקיים $B(s,r)\cap S=\{s\}$. אחרת, נסמן

$$\{s_1,\ldots,s_n\}=N\cap S\setminus\{s\}\,.$$

נירח $r=\min\{d(s,s_i)\,|1\leq i\leq n\}$. אזי ברור ש $B(s,r)\cap S=\{s\}$ וסיימנו.

תרגיל 2.16. יהי (X,d) מרחב מטרי ו $A\subseteq X$. יהי B אוסף כל נקודות מבודדת של A. הוכיחו או הפריכו: B היא קבוצה סגורה.

פתרון. נפריך על ידי דוגמה נגדית. תהי $X=\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{R}$. נשים לב, שכל נקודה ב X היא נקודה מבודדת, מכיוון שלכל $n\in\mathbb{N}$,

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}=B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cap X$$

ולכן מבודדת. מצד שני X אינה סגורה מכיוון שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$היא סדרה של איברים ב X שמתכנסת ל 0, ו $0\notin X$.

3 קבוצות פתוחות וסגורות בתתי-מרחבים.

כפי שראינו בקורסים באינפי בשנה הראשונה, אנו לעיתים מעוניינים על פונקציות שמוגדרות על תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ ולאו דווקא בפונקציות שמוגדרות על הישר הממשי כולו. המצב לא השתנה, ולהמשך, לעיתים חשוב להבין כיצד נראות תתי-קבוצות פתוחות ביחס לתתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ או שהם למעשה תתי-מרחבים מטריים של $\mathbb{R}$.

הערה 3.1. נזכר שאמרנו שקבוצה S פתוחה ב X. נבהיר של X יש חשיבות. שייתכן שאם $X \subseteq Y$ (עם המטריקה המושרית של Y כמובן), S פתוחה ב X אך אינה פתוחה ב Y.

דוגמה 3.2. נזהה את הישר הממשי $\mathbb{R}$עם ציר ה x ב $\mathbb{R}^2$, כלמר הקבוצה $\left\{(x,0)\,\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$. הקבוצה היא פתוחה בתוך עצמה אבל אינה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$, שכו כל כדור פתוח סביב נקודה מהצורה $(x,0)$ מכיל נקודה מהצורה (x,y), כאשר $y\neq 0$.

הטענה נכונה גם עבור קבוצות סגורות, שכן הקבוצה $X=(0,1)$ סגורה בתוך עצמה אך אינה סגורה ב $\mathbb{R}$, מפני ש 1 היא נקודת הצטברות של X ב $\mathbb{R}$, ו $1\notin X$ (אבל 1 היא לא נקודת הצטברות של X ב X!!!).

המשפט הבא נותן אפיון לקבוצות פתוחות של תתי-מרחבים.

משפט 3.3. יהי (X,d) מרחב מטרי, ויהי $Y\subseteq X$ תת-מרחב של X. אזי מתקיים:

1. תת-קבוצה U של Y פתוחה ב Y אם ורק אם קיימת קבוצה פתוחה V ב X כך ש $V\cap Y=U$.

2. תת-קבוצה U של Y סגורה ב Y אם ורק אם קיימת קבוצה סגורה V ב X כך ש $V\cap Y=U$.

הוכחה. נוכיח את החלק הראשון תחילה.

($\Longrightarrow$) נניח ש $U=V\cap Y$ עבור קבוצה פתוחה V ב X. מכיוון שכל נק' $u\in U$ היא נק' של V, לכל u קיים r כך ש $B_X(u,r)\subseteq V$ (נסמן כדורים פתוחים ב X וכדורים פתוחים ב Y על ידי B_X ו B_Y בהתאמה, כל מנת למנוע בלבול). נשים לב שמתקיים:

$$\begin{aligned}
B_X(u,r)\cap Y &=\\
\{x\in X|d(x,u)<r\}\cap Y &=\\
\{x\in X|d(x,u)<r\wedge x\in Y\} &=\\
\{y\in Y|d(y,u)<r\} &= B_Y(u,r).
\end{aligned}$$

אבל $B_X(u,r)\subseteq V$ ולכן מתקיים

$$.B_Y(u,r)=B(u,r)\cap Y\subseteq V\cap Y=U$$

כלמר, הראנו שלכל נקודה $u\in U$ קיים כדור פתוח $B_Y(u,r)\subseteq U$ ולכן U פתוחה ב Y.

($\Longleftarrow$) נניח ש U קבוצה פתוחה ב Y. נראה שקיימת V פתוחה ב X כך ש $U=V\cap Y$. מכיוון ש U פתוחה, ניתן להציג אותה על ידי האיחוד

$$U=\bigcup_{i\in I}B_Y(u_i,r_i)$$

על פי המשפט שרשמנו קודם. מצד שני

$$V=\bigcup_{i\in I}B_X(u_i,r_i)$$

היא איחוד של קבוצות פתוחות ולכן פתוחה ומתקיים:

$$\begin{aligned} V \cap Y = \\ \left(\bigcup_{i\in I} B_X(u_i, r_i)\right) \cap Y = \\ \bigcup_{i\in I} \left(B_X(u_i, r_i) \cap Y\right) = \\ \bigcup_{i\in I} B_Y(u_i, r_i) = U. \end{aligned}$$

כלמר U הינה חיתוך של קבוצה פתוחה ב X ו Y, כנדרש.

הוכחה. על מנת להוכיח את החלק השני, נשים לב שאם $U \subseteq Y$ היא קבוצה סגודרה ב Y, אזי $Y \setminus U$ היא קבוצה פתוחה ב Y. על פי החלק הראשון, קיימת V פתוחה ב X כך ש $Y \cap V = Y \setminus U$. אזי

$$U = Y \cap (X \setminus V)$$

והיא ו $(X \setminus V)$ היא סגורה ב X. □

□

תרגיל 3.4. הוכיחו את הטענות הבאות:

1. אם Y היא תת-קבוצה פתוחה של X ו Z היא תת-קבוצה פתוחה של Y אזי Z היא תת-קבוצה פתוחה של X.
2. אם Y היא תת-קבוצה סגורה של X ו Z היא תת-קבוצה סגורה של Y אזי Z היא תת-קבוצה סגורה של X.

פתרון.

1. נניח ש Z היא תת-קבוצה פתוחה של Y. אזי על פי המשפט שהבאנו, קיימת V פתוחה ב X כך ש $Z = U \cap Y$. אבל Y פתוחה ב X ולכן $U \cap Y$ פתוחה ב X.
2. באותו אופן - פשוט מחליפים כל מקום שמופיע סגורה בפתוחה.

תרגיל 3.5. האם $\mathbb{Q}$ היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{Q}$? מן הסתם כן, כי X היא תמיד קבוצה פתוחה לכל מרחב מטרי (X, d). דרך אחרת:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}$$

כלמר חיתוך של עצמו אם קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

4 פנים וסגור

הגדרה 4.1. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $U\subseteq X$. אזי הסגור של U מוגדר על ידי החיתוך

$$\overline{U}=\bigcap_{S}S$$

עבור כל הקבוצות הסגורות S שמכילות את U.

במילים אחרות כקבוצה הקטנה ביותר שמיכלה את U. את התנאי של החיתוך ניתן לרשום באופן הבא: $\overline{U}$ היא קבוצה סגורה אשר מקיימת:

1. $U\subseteq\overline{U}$.
2. אם $U\subseteq V\subset\overline{U}$,)אזי V אינה סגורה.
3. אם V סבגורה ו $U\subseteq V$ אזי $\overline{U}\subseteq V$.

נשים לב, ששני התנאים האחרונים שקולים. בנוסף, מכיוון שהסגור מוגדר על ידי חיתוך של סגורות, הוא קבוצה סגורה.

לעיתים נסמן $cl\left(U\right)$ במקום $\overline{U}$.

דוגמה 4.2. הסגור של $(0,1)$ ב $\mathbb{R}$ הוא הקטע הסגור $[0,1]$.

הוכחה. נשים לב ש $[0,1]$ קבוצה סגורה שמכילה את $(0,1)$. כמו כן, $[0,1)$ ו $(0,1]$ אינן סגרות, מכיוון שהן לא מכילות את נקודות ההצטברות שלהן. □

הגדרה 4.3. יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $A\subseteq X$. נסמן על ידי A' את אוסף הנקודות הצטברות של A.

משפט 4.4. אזי $\overline{A}=A'\cup A$.

הערה 4.5. לעיתים השוויון במשפט נלקח כהגדרת הסגור של קבוצה ולא ההגדרה שהבאנו. כמובן שהן שקולות.

תרגיל 4.6. הראו, ש $\overline{\mathbb{Q}}$ ב $\mathbb{R}$ הוא $\mathbb{R}$.

פתרון. ראינו, ש $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$. הטענה נובעת מהמשפט.

הגדרה 4.7. יהי (X,d) מרחב מטרי ו $A\subseteq X$. הפנים של A שיסומן על ידי A° או על ידי $int\left(A\right)$ הוא מוגדר על ידי האיחוד

$$A=\bigcup_{S}S$$

על פני כל הקבוצות הפתוחות שמוכלות ב A.

כלמר, A° היא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב A. זאת אומרת,A°היא הקבוצה הפתוחה אשר מקיימת:

1. $A^{\circ}\subseteq A$.
2. אם $A^{\circ}\subset B$ (הכלה ממש ו $B\subseteq A$), ו $B\subseteq A$ אזי B אינה קבוצה פתוחה.
3. אם $B\subseteq A$ ו B פתוחה, אזי $B\subseteq A^{\circ}$.

שוב, 2 ו 3 הם ניסוחים שקולים של אותו התנאי. בנוסף, מכיוון ש A° מוגדר כאיחוד של פתוחות, הוא קבוצה פתוחה.

דוגמה 4.8. הפנים של $\overline{B}(0,1)$ ב $\mathbb{R}^n$ היא $B(0,1)$, מכיוון ש $B(0,1)$ פתוחה ומצד שני אם $x \in \overline{B}(0,1)$ אזי $\|x\| = 1$. אזי לכל $\epsilon > 0$,

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) x \in B(x, \epsilon)$$

ומצד שני $\left\|\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) x\right\| = 1 + \frac{\epsilon}{2}$ ולכן

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) x \notin \overline{B}(x, \epsilon).$$

תרגיל 4.9. הראו, ש A° שווה לאוסף הנקודות הפנימיות של A.

פתרון. נניח ש $a \in A$ היא נקודה פנימית של A. אזי קיימת סביבה פתוחה U של a כך ש $U \subseteq A$. לכן, $U \subseteq A^\circ$ ו $a \in A$. מצד שני, אם $a \in A^\circ$ היא נקודה פנימית של A°, מפני ש A° היא קבוצה פתוחה, ואם היא נקודה פנימית של A°היא גם נקודה פנימית של A.

תרגיל 4.10. הוכיחו שמתקיים

$$cl(A) = int\left((A^c)\right)^c$$

כאשר A^c משלים את A במרחב מטרי X.

פתרון 4.11. על פי ההגדרה,

$$cl(A) = \bigcap_{A \subseteq S} S$$

על פני כל הקבוצות S שמכילות את A. אם S היא קבוצה סגורה שמכילה את A, S^c היא קבוצה פתוחה שמוכלת ב A^c. נשתמש בדה-מורגן ונקבל

$$cl(A) = \bigcap_{A \subseteq S} S = \left(\bigcup_{S^c \subseteq A^c} S^c\right)^c$$

והסוגריים השניים הם בדיוק ההגדרה של הסגור.

הגדרה. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$. אזי השפה של A, מסומנת על ידי ∂A מוגדרת על ידי

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

דוגמה 4.12. השפה של כדור פתוח $B(0,1)$ ב $\mathbb{R}^n$ הוא ספרת היחידה

$$\left\{x \middle| \|x\| = 1\right\},$$

כי כמו שראינו, $cl(B(0,1)) = \overline{B}(0,1)$ (הסימון מצדיק את עצמו...) ו

$$B(0,1)^\circ = B(0,1).$$

נפעיל את ההדרגה ונקבל את המבוקש.

5 קבוצות קומפקטיות

ראינו, שלמעשה "סגירות" או "פתוחות" של קבוצה לעיתים תלוייה לא רק במטריקה עליה, אלא באיזה מרחב היא "חייה". למשל $\mathbb{Z}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל פתוחה ב $\mathbb{Z}$. כאשר אנו רוצים להבין לחקור התנהגות של פונקציה $f: X \to Y$, כגון מציאת מינימום ומקסימום או שרוצים להבין את $f(X) \subseteq Y$, המושגים "פתוחה" ו"סגורה" הם לעיתים לא מספיק חזקים, כי הם תלויים לא רק במטריקה, אלא האם אנו רואים הקבוצה היא תת-קבוצה של קבוצה אחרת, או לא. נדון בקומפקטיות שהיא תכונה יותר חזקה, ואינה תלוייה בשיכון אלא רק בטופולוגיה של X.

הגדרה 5.1. יהי (X,d) מרחב נורמי. הקבוצה הקוצה $A \subseteq X$ נקראת חסומה אם קיים $x \in X$ ו $0 < r$ כך ש $A \subseteq \overline{B}(x,r)$.

המחב נורמי ההגדרה שקולה להגדרה הבאה:

משפט 5.2. יהי $(V, \|\cdot\|)$ אזי $A \subseteq V$ היא נקראת חסומה אם ורק אם קיים c > 0 כך ש $\|v\| < c$ לכל $v \in A$.

דוגמה 5.3. להלן כמה דוגמאות.

1. $B(x,r)$ היא קבוצה חסומה על פי ההגדרה.
2. $\mathbb{Z}$ אינה קבוצה חסומה.
3. כל קבוצה סופית היא חסומה.

לעיתים יותר להראות תכונות מסויימות על ידי שימוש בתיבות n מימדיות.

הגדרה 5.4. יהיו $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ אוסף של מאורך סופי. הקבוצה $B = I_1 \times \cdots \times I_n$ נקראת תיבה n מימדית ב $\mathbb{R}^n$.

1. אם לכל $1 \leq i \leq n$, I_i הוא קטע פתוח, אזי B נקראת תיבה פתוחה.
2. אם לכל $1 \leq i \leq n$, I_i הוא קטע סגור, אזי B נקראת תיבה סגורה.

עובדה. התכונות הבאות מתקיימות:

1. כל תיבה פתוחה היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$.
2. תיבה סגורה היא קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}^n$.
3. קבוצה לא ריקה A היא פתוחה $\mathbb{R}^n$אם ורק אם היא איחוד של תיבות פתוחות.
4. כל תיבה n מימדית היא קבוצה חסומה ב $\mathbb{R}^n$.
5. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אם ורק אם קיימת תיבה n-מימדית ב B כך ש $A \subseteq B$.

נעבור להגדיר קומפקטיות.

הגדרה 5.5. תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$ נקראת קומפקטית אם היא חסומה וסגורה.

הערה. ההגדרה הזאת אינה נכונה לכל מרחב מטרי, אך היא מספיקה לקורס שלנו. נביא את ההגדרה הכללית בהמשך.

דוגמה 5.6. נביא מספר דוגמאות נוספות.

1. כל כדור סגור ב $\mathbb{R}^n$ (כמרחב נורמי), הוא קומפקטי, שכן ראינו שהוא חסום וסגור.

2. כל קבוצה סופית היא קבוצה קומפקטית.

3. מעגל היחידה $S^1 = \left\{(x,y)\,|x^2+y^2=1\right\}$ היא קבוצה קומפקטית מפני שהיא חסומה וסגורה, מפני שניתן לבטא על ידי חיתוך של שתי קבוצות סגורות

$$S^1 = \overline{B}\left(0,1\right)\cap B\left(0,1\right)^c$$

כאשר $B\left(0,1\right)^c = \mathbb{R}^2\setminus B\left(0,1\right)$.

4. תיבה n מימדית היא קבוצה קומפקטית.

5. הקבוצה $\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה קומפקטית, למרות שהיא חסומה, מכיוון שאינה שהיא לא סגורה.

6. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה על קטע סגור. אזי הגרף של f המוגדר על ידי $\Gamma_f = \left\{(x,f(x))\,|x\in[a,b]\right\}$ היא קבוצה קומפקטית. תחילה, נשים לב ש Γ_f היא חסומה מפני שלכל $(x,y)\in\Gamma_f$, מתקיים $a\le x\le b$ ו $\min\left\{f(x)\,|x\in[a,b]\right\}\le y\le\max\left\{f(x)\,|x\in[a,b]\right\}$. נראה ש Γ_f היא קבוצה סגורה. נראה שאם $\left\{(x_n,y_n)\right\}_{n=1}^{\infty}\in\Gamma_f$ היא סדרה מתכנסת ל (x,y) אזי $y=f(x)$. נשתמש בקריטריון היינה להתכנסות של סדרות. אם $(x_n,y_n)\in\Gamma_f$, אזי $y_n=f(x_n)$, ואם

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n,f(x_n))=(x,y)$$

אזי $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ (בשלב הזה נדגיש $x\in[a,b]$ מכיוון ש $[a,b]$ היא קבוצה סגורה) ועל פי קריטריון היינה לרציפות

$$y=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x).$$

נעבור להציג את ההגדרה "האמיתית" לקומפקטיות (ש $\mathbb{R}^n$ מתכלדת עם ההגדרה שהראנו קודם). היא טיפה מסורבלת, אך לעיתים הרבה יותר נוחה להוכחות. תחילה, נביא כמה הגדרות מקדימות.

הגדרה 5.7. יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $A\subseteq X$. נאמר שהאוסף של קבוצות פתוחות $\mathcal{U}$ הוא כיסוי פתוח של A אם

$$A_i\subseteq\bigcup_{U\in\mathcal{U}}U.$$

דוגמה 5.8. מספר מקרים פשוטים מתי קבוצה היא כיסוי פתוח ומתי לא.

1. האוסף $\left\{\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ הוא כיסוי פתוח של $(0,1)$, מכיוון שלכל $x\in(0,1)$, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n}$ (ז"א $x\in\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$.)

2. האוסף $\{B(x,r)\}_{(x,r)\in\mathbb{Q}^n\times\mathbb{Q}^+}$ הוא כ"פ של $\mathbb{R}^n$, מכיוון שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ קיים $q\in\mathbb{Q}^n$ ו $0<r\in\mathbb{Q}$ כך ש $\|x-q\|<q$.

3. אוסף $\{I_1\times\cdots\times I_n | I_i=(a_i,b_i)\wedge a_i,b_i\in\mathbb{R}^n\}$ הוא אוסף כיסוי פתוח של $\mathbb{R}^n$.

4. האוסף $\{[a_i,b_i]\,|a_i,b_i\in\mathbb{R}\}$ אינו מהווה כיסוי פתוח של $\mathbb{R}^n$, מפני שלא כל הקבוצות באוסף הן פתוחות.

5. האוסף $\left\{\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ אינו מהווה כיסוי פתוח של $[-1,1]$ מפני שלא קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $-1,1\in\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$, ז"א

$$[-1,1]\not\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right).$$

הגדרה 5.9. יהי (X,d) מרחב מטרי, $A\subseteq X$ ו $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של A. נאמר ש $\mathcal{V}$ הוא תת-כיסוי פתוח של A, אם לכל $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ ו

$$A\subseteq\bigcup_{V\in\mathcal{V}}V.$$

נאמר ש $\mathcal{V}$הוא תת-כיסוי פתוח סופי של $\mathcal{U}$, אם $\mathcal{V}$ הוא תת-כיסוי של $\mathcal{U}$ ו $|V|<\infty$.

הערה. בהינתן כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i\in I}$ של קבוצה A, לא בהכרח קיים לו תת-כיסוי פתוח סופי.

דוגמה 5.10. לכיסוי פתוח $\left\{\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ של $(0,1)$ לא קיים תת-כיסוי פתוח סופי, מכיוון שאם $\left\{\left(\frac{1}{i_k},1-\frac{1}{i_k}\right)\right\}_{k=1}^{m}$ היא תת-כיסוי של $(0,1)$ אזי מתקיים

$$\bigcup_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{i_k},1-\frac{1}{i_k}\right)=\left(\frac{1}{M},1-\frac{1}{M}\right)\not\supseteq(0,1)$$

כאשר $M=\max\{M\}$.

תרגיל 5.11. הראו לכל כיסוי פתוח של $X=\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ קיים תת-כיסוי פתוח סופי.

פתרון. יהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של X. מכיוון ש $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של X, קיים $U_0\in\mathcal{U}$ כך ש $0\in U_0$. מכיוון ש U היא קבוצה פתוחה, קיים $r>0$ כך ש

$$B(0,r)=(-r,r)\subseteq U_0.$$

אבל, לכל $r>0$, קיים רק מספר סופי של $x\in X$ כך ש $x<r$, כיוון שקיים מספר סופי של טבעיים שמקיימים

$$n<\frac{1}{r}$$

ולכל טבעי שמקיים $n<\frac{1}{r}$ מקיימים, $r<\frac{1}{n}$. לכל $r<x\in X$ (כפי שאמרנו יש מספר סופי כאלה) נבחר קבוצה פתוחה $x\in U_x\in\mathcal{U}$. הקבוצה הסופית

$$\left\{U_x\middle|x\notin U_0\right\}\cup\{U_0\}$$

הכיסוי הסופי הדרוש.

עכשיו ניתן את ההגדרה לקומפקטיות עבור מרחב מטרי כללי.

הגדרה 5.12. יהי (X,d) מרחב מטרי. נאמר ש $A \subseteq X$ היא קבוצה קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח $\mathcal{U}$ של A, קיים תת-כיסוי פתוח סופי.

הערה. שימו לב למילה "לכל" בהגרה. זאת אומרת, שלא משנה איזה כיסוי פתוח $\mathcal{U}$ של A ניקח, ל $\mathcal{U}$ יש כיסוי פתוח סופי. כלמר, לא מספיק שקיים כיסוי שיש לו תת-כיסוי סופי, אלא זה צריך להצקיים לכל כיסוי. כך, הקבוצה $(0,1)$ אינה קומפקטית, כי הראנו שקיים כיסוי פתוח של $(0,1)$ שלא מכיל תת-כיסוי סופי. מצד שני, $\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ היא קומפקטית, כי הראנו שכל כיסוי פתוח שלה מכיל תת-כיסוי סופי.

קומקטיות כפי שמסתבר היא תכונה מאד חזקה, ובמובן מסויים אוניברסלי. להבדיל מהתכונה של להיות קבוצה פתוחה, אין חשיבות אם אנו רואים את X כתת-מרחב של מרחב גדול או יותר, או בתור מרחב בפני עצמו. יחד עם זאת, ההגדרה האחרונה היא מסורבלת במעט, ולעיתים קשה להראות שלכל כיסוי פתוח קיים תת-כיסוי פתוח סופי. למזלנו, ב $\mathbb{R}^n$ההגדרה שקולה להגדרה שהבאנו קודם. המשפט הבא מסכם את הקשר בינהן, ומוסיף קריטריון נוסף לקומפקטיות (שגם תקף לכל מרחב מטרי).

משפט 5.13. (מפשט היינה-בורל). יהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים ב $\mathbb{R}^n$.

1. X חסומה וסגורה ב $\mathbb{R}^n$.
2. X קומפקטית.
3. לכל תת-קבוצה אינסופית של X קיימת נקודת הצטברות.

הערה. תנאים 2 ו 3 שקולים בכל מרחב מטרי, אף על פי שההוכחה אינה טריוויאלית. לגבי 1 ו 2, הגרירה נכונה רק בכיוון אחד.

תרגיל 5.14. הראו, מהגדרה השניה ישירות, שאם X קומקטית, ו $Y\subseteq X$ סגורה, אזי Y קומפקטית.

הערה. ב $\mathbb{R}^n$ התוצאה היא מידית, בגלל משפט היינה בורל.

פתרון. יהי X מרחב קומפקטי ונניח ש $Y\subseteq X$ סגורה. יהי $\mathcal{U}$ כ"פ של Y. נראה, שהוא מכיל תת כ"פ סופי של Y. אם $\mathcal{U}$ הוא גם כ"פ של Xסיימנו, מכיוון ש $\mathcal{U}$ מכיל, תת כ"פ סופי של X שהוא בפרט גם כ"פ של Y. אחרת, נתבונן ב $\mathcal{U}'=\mathcal{U}\cup\{X\setminus Y\}$. מתקיים:

$$
\begin{aligned}
Y &\subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\\
&\Downarrow\\
X = Y\cup(X\setminus Y) &\subseteq \left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\right)\cup(X\setminus Y)\\
&= \bigcup_{U\in\mathcal{U}'} U
\end{aligned}
$$

ולכן $\mathcal{U}'$ הוא כ"פ של X. אזי הוא מכיל תת כ"פ סופי $\mathcal{V}$ של X. מכיוון ש $Y\cap(X\setminus Y)=\emptyset$, $\mathcal{V}\setminus\{X\setminus Y\}$ הוא כ"פ סופי של Y, כנדרש.

תרגיל 5.15. יהי X מרחב מטרי, והיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות קומפקטיות, כך שלכל תת-קבוצה סופית $J\subseteq I$,

$$
\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset .
$$

אזי

$$.\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$$

פתרון. נניח בשלילה, שהטענה אינה נכונה, כלמר שמתקיים

$$.\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$$

מכיוון שקבוצה קומפקטית היא בהכרח סגורה, המשלים שלה A_i^c היא קבוצה פתוחה ונקבל:

$$.X = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A^c$$

נבחר $A_j \in \{A_i\}_{i\in I}$. $A_j \subseteq X = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ ולכן $\{A_i^c\}_{i\in I}$ הוא כ"פ של A. מקופקטיות של A_J, קיים ל $\{A_i^c\}_{i\in I}$ תת כ"פ סופי $\{A_{i_k}^c\}_{k=1}^m$ של A_j, כלמר

$$.A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^m A_{i_k}^c$$

אבל, אז מתקיים

$$A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^m A_{i_k}^c\right) = \emptyset$$

בסתירה להנחה שחיתוך של כל מספר סופי של קבוצות ב $\{A_i\}_{i\in I}$ הוא לא ריק.

משפט 5.16. יהי X מרחב מטרי, ויהי $Y \subseteq X$ תת-מרחב. תהי $A \subseteq Y$. הראו ש A קומפקטית ביחס ל X אם ורק אם A קומפקטית ביחס ל Y.

הוכחה. ($\Longleftarrow$) נניח, ש A קומפקטית ביחס ל X. נראה, ש A קומפקטית ביחס ל Y. יהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח סופי של קבוצות פתוחות ב Y של A. אזי, לכל $U \in \mathcal{U}$ קיימת קבוצה פתוחה V ב X כך ש t

$$.V \cap Y = U$$

האוסף $\mathcal{V} = \{V | \exists U \in \mathcal{U} : V \cap Y = U\}$ הוא כ"פ של A ב X ולכן, קיים לו כ"פ סופי.

($\Longrightarrow$) נניח, ש A קומפקטית ביחס ל Y. יהי $\mathcal{U}$ כ"פ של A ב X. נראה, שקיים לו תת כ"פ סופי. נסמן:

$$\mathcal{V} = \{U \cap Y | U \in \mathcal{U}\}$$

הוא אוסף של קבוצות פתוחות ב Y ומתקיים

$$A \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \wedge (A \subseteq Y) \implies$$

$$A \subseteq Y \cap \left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\right) =$$

$$= \bigcup_{U\in\mathcal{U}} Y \cap U = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$$

ולכן הוא מהווה כ"פ של A ב Y. מקומפקטיות, קיים ל $\mathcal{V}$ תת כ"פ סופי של A, $\{V_k\}_{k=1}^n$.
לכל $1 \le k \le n$ קיים $U_k \in \mathcal{U}$ כך ש $U_k \cap Y = V_k$ על פי הבניה של $\mathcal{V}$. אבל,

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k$$

ולכן $\{U_k\}_{k=1}^n$ מהווה כ"פ סופי. לכן A קומפקטית ב X.

נראה שקומפקטיות, היא תכונה שנשמרת תחת פונקציות רציפות. $\square$

הגדרה 5.17. יהיו (X,d) ו (Y,d) מרחבים מטריים. פונקציה $f : X \to Y$ נקראת רציפה אם לכל $U \subseteq Y$ פתוחה $f^{-1}(U) \subseteq X$ היא גם קבוצה פתוחה.

משפט 5.18. יהיו (X,d) ו (Y,d) מרחבים מטריים, ונניח ש X קומפקטית ו $f : X \to Y$ רציפה. אזי $f(X)$ היא קבוצה קומפקטית ב Y.

הגדרה 5.19. יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע סגור. פונקציה רציפה $\gamma : I \to X$ נקראת מסילה.

למה 5.20. יהי $A \subseteq \mathbb{R}$. אזי $f : A \to \mathbb{R}^n$ רציפה אם ורק אם היא רציפה בכל רכיב. (כלמר, ניתן לבטא $f(x) = (f_1(x), \dots f_n(x))$ כך שלכל $1 \le i \le n$, $f_i : A \to \mathbb{R}$ היא רציפה.

תרגיל 5.21. הראו, שהקבוצה $S = \left\{(x,y) \,\middle|\, y = \sqrt{1-x^2}\right\}$ היא קבוצה קומפקטית.

פתרון. אפשר, במאמץ מסויים להראות שהקבוצה היא סגורה וחסומה. אמנם, בעזרת השימוש במשפט האחרון, התוצאה היא מיידית. תחילה, נשים לב, ש $-1 \le x \le 1$ מהגדרת S.
נגדיר פונקציה $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ על ידי

$$.f(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$$

הפונקציה f רציפה בכל רכיב ולכן רציפה. בנוסף, $[-1,1]$ היא קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקטית. קל לראות, ש $f([-1,1]) = S$ ולכן S קומפקטית כתמונה של פונקציה רציפה.

מהמשפט האחרון נקבל את המסקנה הבאה.

משפט 5.22. אם X קומפקטית ו $f : X \to \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, אזי f מקבלת מינימום ומקסימום על X.

תרגיל 5.23. תהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית. אזי קיים $x \in X$, כך שלכל $y \in X$, מתקיים $\|y\| \le \|x\|$. כלמר, קיים x שהנורמה שלו היא מקסימלית.

פתרון 5.24. נשים לב, ש $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, מכיוון שלכל קטע פתוח $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

$$f^{-1}[(a,b)] = \left\{X \,\middle|\, a < \|X\| < b\right\}$$

שיכולה לקבל 3 צורות אפשריות:

1. $B(0,b) \setminus \overline{B}(0,a)$ אם $0 < a$:.
2. $B(0,b)$ אם $a \le 0 < b$.
3. $\emptyset$ אם $b \le 0$.

שבכל אחד מהמקרים זאת קבוצה פתוחה. מכיוון שכל קבוצה פתוחה U ב $\mathbb{R}$ היא איחוד של קטעים פתוחים, $f^{-1}\left(U\right)$ היא איחוד של תמונות הפוכות של קטעים פתוחים, שהן פתוחות ולכן פתוחה.

על פי המשפט, $\left.\|\cdot\|\right|_X$ מקבלת מינימום ומקסימום, ולכן קיים $x \in X$ בעל נורמה מקסימלית.

התנאי האחרון לקומפקטיות ב $\mathbb{R}^n$ נותן לנו את משפט בולצנו ויירשטראס.

משפט 5.25. (בולצנו ויירשטראס). לכל קבוצה אינסופית וחסומה ב $\mathbb{R}^n$ קיימת נקודת הצטברות.

הערה. ניתן לנסח אותו בצורה מעט שונה: לכל סדרה חסומה $\{a_n\}$ ב $\mathbb{R}^n$ קיימת תת-סדרה מתכנסת.

דוגמה 5.26. הראו, לסדרה $a_n = \left(\cos n, e^{\cos\sqrt{n}+\sin n^3}, \arcsin\left(n\cos n^2\right)\right)$ קיימת תת-סדרה מתכנסת.

פתרון. מכיוון שסדרה חסומה בכל רכיב, ניתן להסיק אותו מהמקרה אחד מימדי והפעלתו מספר פעמים, על מנת להראות שהגבולות החלקיים נמצאים ב"מקומות הנכונים". אמנם, אם היא חסומה בכל רכיב, היא חסומה והתוצאה אוטומטית ממשפט בולצנו-ויירשטראס.

6 קשירות וקשירות מסילתית

הגדרה 6.1. יהי (X,d) מרחב מטרי. נאמר, ש X קשירה, אם לכל שתי קבוצות פתוחות $\emptyset \neq U,V \subseteq X$ אם $U\cup V = X$, אזי $U\cap V\neq\emptyset$. במילים אחרות, לא ניתן להציג את X כאיחוד של שני קבוצות פתוחות לא זרות.

דוגמה 6.2.

1. כל קבוצה סופית X שמכילה יותר מאיבר בודד אינה קשירה.
2. $\mathbb{Z}$ אינה קשירה, כי לכל $m\in\mathbb{Z}$, $\{m\}$ היא קבוצה פתוחה, ולכן כל קבוצה ב $\mathbb{Z}$ היא פתוחה ולכן לכל $\emptyset\neq A\subsetneq\mathbb{Z}$, $A\cup(\mathbb{Z}\setminus A)=\mathbb{Z}$, וברור שהן פתוחות וזרות.
3. $\mathbb{Q}$ אינה קשירה. ניקח $p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ שרירותי. ברור ש (p,∞) ו $(-\infty,p)$ פתוחות, ולכן $\mathbb{Q}\cap(p,\infty)$ ו $(-\infty,p)\cap\mathbb{Q}$ פתוחות ב $\mathbb{Q}$. מצד שני,

$$\begin{aligned}(\mathbb{Q}\cap(p,\infty))\bigcup(\mathbb{Q}\cap(-\infty,p)) &=\\ \mathbb{Q}\cap((p,\infty)\cup(-p,\infty)) &=\\ \mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\{p\}) &= \mathbb{Q}\end{aligned}$$

כלמר, הצלחנו לבטא את $\mathbb{Q}$ כאיחוד זר של שתי קבוצות פתוחות.

דוגמה 6.3. $\mathbb{R}$ היא קבוצה קשירה.

הוכחה. נניח בשלילה שלא. אזי קיימות $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות, כך ש $A\cap B=\emptyset$ ו $A\cup B=\mathbb{R}$. בה"כ נניח, ש $0\in A$. נסמן:

$$\begin{aligned}x &= \sup\left(B\cap\mathbb{R}^-\right)\\ y &= \inf\left(B\cap\mathbb{R}^+\right)\end{aligned}$$

ברור, שלפחות אחת מהקבוצות אינה ריקה, ואם היא ריקה היא חסומה על ידי 0. לכן או ש $x \neq -\infty$ ו $y \neq \infty$, אחרת $A = \mathbb{R}$ בסתירה לכך ש $B \neq \emptyset$.בה"כ, $y \neq \infty$ ולכן $y \in \mathbb{R}$.
ברור, ש $y \notin A$, כי אחרת קיים $r > 0$ כך ש $(y-r, y+r) \subseteq A$, מכיוון שלכל $0 < t < y$, וקיבלנו ש $(0, y+r) \subseteq \mathbb{R}^{+} \setminus B$ ולכן $y \neq \inf\left(\mathbb{R}^{+} \cap B\right)$. מצד שני, $y \notin B$, כי אחרת קיים $r > 0$ כך $(y-r, y+r) \subseteq B$, ז"א קיים $0 < y-r < t < y$ כך ש $t \in B$ בסתירה לכך ש $y = \inf\left(\mathbb{R}^{+} \setminus B\right)$. באותו אופן מראים שלא ייתכן ש $x \in \mathbb{R}$. קיבלנו סתירה ולכן $\mathbb{R}$ קשירה.

בהרצאה ראיתם הגדרה של פונקציה רציפה ואת משפט ערך הביניים. דיון יותר מקיף של פונקציות רציפות יופיע בהמשך הקורס. $\square$

משפט 6.4. יהיו $f : X \to Y$ פונקציה רציפה ונניח ש X קשירה. אזי $f(X)$ קשירה.

תרגיל 6.5. נניח X, Y מרחבים קשירים. אזי $X \times Y$ גם קשירה.

הערה. הטענה נכונה לכל מרחב מטרי (ואפילו טופולוגי), אבל אפשר להניח ש $X \subseteq \mathbb{R}^{n}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^{m}$.

פתרון. תחילה, לכל $x \in X$ נגדיר $f_x : Y \to X \times Y$ על ידי $f_x(y) = (x, y)$ ולכל $y \in Y$ נגדיר $g_y : X \to X \times Y$ על ידי $g_y(x) = (x, y)$. נשים לב f_x ו g_y רציפות, לכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$. לכן, $f_x(Y) = \{x\} \times Y$ ו $g_y(X) = X \times \{y\}$ הן קבוצות של קשירות כתמונטת של פונקציות רציפות. עכשיו נניח בשלילה, ש $X \times Y$ אינה קשירה. אזי קיימות $A, B \subseteq X \times Y$ פתוחות, כך ש $A \cup B = X \times Y$ ו $A \cap B = \emptyset$. אזי ניתן הגדיר פונקציה

$$h : X \times Y \to \{0, 1\}$$

על ידי

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in A \\ 0 & (x, y) \in B \end{cases}.$$

נשים לב, ש $h(x, y)$ רציפה והתמונה אינה קשירה. לכן קיימים $(x_1, y_1) \in A$ ו $(x_2, y_2) \in B$ ומתקיים $h(x_1, y_1) = 1$ ו $h(x_2, y_2) = 0$. מצד שני, מכיוון ש

$$\{x_1\} \times Y$$

קשירה $h|_{\{x_1\} \times Y}$ קבועה, כי $\{0, 1\}$ אינה קשירה ולכן

$$h|_{\{x_1\} \times Y}(x_1, y_2) = h|_{\{x_1\} \times Y}(x_1, y_1) = 1.$$

מאותה הסיבה $h|_{X \times \{y_2\}}$ קבועה, ומתקיים

$$h|_{X \times \{y_2\}}(x_2, y_2) = h_{X \times \{y_2\}}(x_2, y_2) = 1.$$

אבל $(x_2, y_2) \in B$ ו

$$h|_{X \times \{y_2\}}(x_2, y_2) = h(x_2, y_2) = 0.$$

קיבלנו סתירה.לפ

הגדרה 6.6. יהי X מרחב מטרי. נגדיר יחס $\sim$ על X על ידי $x \sim y$ אם לכל קבוצות U, V שמקיימות $U \cap V = \emptyset$ ו $U \cup V = X$, אז $\{x, y\} \in U$ או $\{x, y\} \in V$. $\sim$ הוא יחס שקילות, ומחלקות שקילות של $\sim$ נקראות מחלקות שקילות.

משפט 6.7. יהי X מרחב מטרי. אזי כל רכיב קשירות הוא קבוצה סגורה.

הוכחה. יהי $A \subseteq X$ רכיב קשירות. נניח ש $b \notin A$. אזי, לכל $a \in A$ ו $b \in X \setminus A$, קיימים U, V כך ש $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ ו $U \cup V = X$. נראה, ש $V \subseteq X \setminus A$. נניח בשלילה שלא. אזי קיים $c \in V \cap A$. כיוון ש $a, c \in A$, $a \sim c$ ואם $U \cap V = \emptyset$ ו $U \cup V = \emptyset$ ו $c \in V$, אזי $a \in V$. אבל $a \in U = X \setminus V$, על פי ההנחה, וזאת סתירה. לכן, לכל $b \in X \setminus A$ קיימת סביבה פתוחה V כך $V \subseteq X \setminus A$ ולכן $X \setminus A$ פתוחה. □

הגדרה 6.8. יהי (X, d) מרחב מטרי. X נקרא קשיר מסילתית, אם לכל $x, y \in X$ קיימת פונקציה מסילה $\gamma : [a, b] \to X$ כך ש $\gamma(a) = x$ ו $\gamma(b) = y$.

דוגמה 6.9.

1. הקבוצה $S^1 = \left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 = 1\right\}$ קשירה מסילתית, שכן, לכל $(x, y) \in S^1$, קיים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$. יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S^1$. אזי

$$(x_1, y_1) = (\cos\theta_1, \sin\theta_2)$$
$$(x_2, y_2) = (\cos\theta_2, \sin\theta_2) \,.$$

בה"כ $\theta_1 < \theta_2$. נגדיר $\gamma : [\theta_1, \theta_2] \to S^1$ על ידי

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \,.$$

γ רציפה רכיב-רכיב ולכן רציפה ומכו כן $\|\gamma(\theta)\| = 1$ ולכן $\gamma(\theta) \in S^1$, לכן γ היא המסילה הדרושה.

2. כל כדור פתוח $B(a, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קשיר מסילתית, מפני שלכל $x, y \in B(a, r)$ היא נגדיר

$$\gamma : [0, 1] \to B(a, r)$$

על ידי

$$\gamma(t) = (1 - t)\, x + ty \,.$$

מתקיים ...

$$\gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y \,.$$

כמו כן, לכל $t \in [0, 1]$ מתקיים

$$\begin{aligned} &\|(1 - t)\, x + ty - a\| = \\ &\|(1 - t)(x - a) + t\,(y - a)\| \le \\ &(1 - t)\,\|x - a\| + t\,\|y - a\| < \\ &(1 - t)\, r + tr = r \end{aligned}$$

באותו אופן ניתן להראות ש $\overline{B(a, r)}$ היא קשירה מסילתית.

את הדוגמה האחרונה ניתן להכליל.

הגדרה 6.10. יהי V מרחב וקרטורי. נאמר, ש $X \subseteq V$ היא קבוצה קמורה, אם לכל $x, y \in X$ ולכל $t \in [0,1]$ מתקיים

$$.tx + (1-t)\,y \in X$$

עובדה. כל תת-קבוצה קמורה $X \subseteq V$ היא קשירה מסילתית. ההוכחה עוברת מילה במילה כמו ההוכחה עבור הכדור הפתוח.

משפט 6.11. כל קבוצה קשירה מסילתית היא קשירה.

דוגמה 6.12. הכיוון השניה אינו נכון. נביא דוגמה נגדית. נתבונן ב $X \subseteq \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$.X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \cup \{(0,1)\}$$

אם נצייר את הקבוצה נקבל קטע $[0,1]$ שלכל נק' $\left(\frac{1}{n}\right)$ חיברנו קטע באורך 1 יחד עם הנקודה $(0,1)$. קל לראות שהקבוצה $X \setminus \{(0,1)\}$ היא קשירה מסילתית. ולכן קשירה. מצד שני, כל סביבה פתוחה של $(0,1)$ מכילה נקודה מהצורה $\left(1, \frac{1}{n}\right)$, ולכן לא ניתן לבטא את X כאיחוד של שתי קבוצות זרות. מצד שני, X אינה קשירה מסילתית, מפני שאם ניקח את

$$\gamma : [a,b] \to X$$

כך ש $\gamma(a) = (0,0)$ נראה ש $s = \sup\{t \in [a,b] \,|\gamma(t) = a\}$ מקיימת $\gamma(s) = (0,1)$ או s היא נקודת אי-רציפות ולכן X אינה קשירה מסילתית.

למזלנו, ב $\mathbb{R}^n$ המצב הוא הרבה יותר פשוט, לפחות עבור קבוצות פתוחות.

משפט 6.13. תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי U פתוחה אם ורק אם U קשירה מסילתית.

הערה. חשוב לזכור, שלא ניתן לוותר על הדרישה U פתוחה במשפט, שכן, X מהדוגמה הקודמת היא תת-קבוצה קשירה של $\mathbb{R}^2$ שפתוחה, אבל אינה פתוחה מסילתית.

תרגיל 6.14. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם X, Y קשירות אזי $X \cap Y$ קשירה.
2. אם A קשירה, אזי A°קשירה.
3. אם A קשירה, אזי $\overline{A}$ קשירה.

פתרון.

1. נפריך על ידי דוגמה נגדית. ניקח X להיות ציר ה x ב $\mathbb{R}^2$ ו Y את מעגל היחידה סביב ה 0. ברור ש $X \cap Y = \{(1,0), (-1,0)\}$ שהיא לא קשירה מסילתית.
2. שוב, נפריך על ידי דוגמה נגדית. ניקח

$$.A = \overline{B}\left((0,1), 1\right) \cup \overline{B}\left((-1,0), 1\right)$$

הקבוצה היא קשירה, ואפילו קשירה מסילתית, מכיוון ש $\overline{B}\left(\left(1,0\right),1\right)$ ו $\overline{B}\left(\left(-1,0\right),1\right)$ הן קבוצות קמורות שהחיתוך שלהן הוא לא ריק (הוא שווה ל $\{(0,0)\}$). אם נקח $x\in\overline{B}\left(\left(1,0\right),1\right)$ ו $y\in B\left(\left(-1,0\right),1\right)$ אזי ניתן להגדיר פונקציה

$$\gamma\left(t\right)=\begin{cases}\left(1-t\right)x+t\left(0,0\right) & t\in[0,1]\\ \left(s-1\right)\left(0,0\right)+\left(2-s\right)y & s\in[0,1]\end{cases}$$

(למעשה שרשור מסילות שאחת מתחילה ב x ומסתיימת ב $(0,0)$ והשניה מתחילה ב $(0,0)$ וספתיימת ב y.) אחרת שתיהן נמצאות באותו כדור שהוא קשיר מסילתית. מצד שני,

$$A^{\circ}=B\left(\left(1,0\right),1\right)\cap B\left(\left(-1,0\right),1\right)$$

שהוא איחוד של כדורים פתוחים זרים, ולכן אינו קשיר.

3. נוכיח את הטענה. נניח בשלילה שלא. אזי ניתן לבטא את $\overline{A}=U\cup V$ כאשר U ו V הן קבוצות פתוחות, זרות ולא ריקות. אזי

$$A=A\cap\left(U\cup V\right)=\left(A\cap U\right)\cup\left(A\cup V\right).$$

הקבוצות U,V הן פתוחות ב $\overline{A}$ ולכן $A\cap U$ ו $A\cap V$ הן פתוחות ב A וזרות, וכיוון שהאיחוד שלהן שווה ל A ו A קשירה, אחת מהן בהכרח ריקה. בה"כ נניח ש $U\cap A=\emptyset$. אזי $U\subseteq\overline{A}\setminus A$. אבל

$$U\subseteq\overline{A}\setminus A=\left(A'\cup A\right)\setminus A$$
$$\Downarrow$$
$$U\subseteq A'$$

ולכן כל $u\in U$ היא נקודת הצטברות של A. אבל אם u נקודת הצטברות של A, כל סביבה פתוחה של u ובפרט U עצמה מכילה נקודה של A $u\neq a\in A$ ולכן $U\cap A\neq\emptyset$ וקיבלנו סתירה.