פתרון תרגיל בית מספר 1

<u>שאלה 1</u>

$d=5, d_1=7, d_{\max}=4$.

$B_d(u,1)$ הוא עיגול היחידה ללא השפה עם מרכז u. $B_{d_1}(u,1)$ הוא הריבוע (ללא השפה) סביב u הכלוא בין הישרים $y=x+4 \quad y=-x+6, \quad y=-x+8, \quad y=x+2,$. $B_{d_{\max}}(u,1)$ הוא הריבוע (ללא השפה) המוגדר ע"י: $1<x<3, \quad 4<y<6$.

<u>שאלה 2</u>

א. נוכיח רק אי שויון המשולש (שאר התכונות טריוויאליות).

נניח ש- $m=\min\{k(x,y),k(y,z)\}$. מתקיים

$a^m \mid x-y,\ a^m \mid y-z \Rightarrow a^m \mid x-z \Rightarrow m\le k(x,z)$, לכן $\min\{k(x,y),k(y,z)\}\le k(x,z)$.

מכאן,

$$d(x,z)=\frac{1}{a^{k(x,z)}}\le\frac{1}{a^{\min\{k(x,y),k(y,z)\}}}=\max\left\{\frac{1}{a^{k(x,y)}},\frac{1}{a^{k(y,z)}}\right\}=$$
$$=\max\{d(x,y),d(y,z)\}\le d(x,y)+d(y,z)$$

ב. $\left(\frac{1}{5^{k(x,32)}}<\frac{1}{25}\right)\vee(x=32)\Leftrightarrow x\in B_{d_5}\left(32,\frac{1}{25}\right)$.

בהנחה ש $x\ne 32$ נקבל:

$$\frac{1}{5^{k(x,32)}}<\frac{1}{25}=\frac{1}{5^2}\Leftrightarrow k(x,32)>2\Leftrightarrow k(x,32)\ge 3\Leftrightarrow 5^3\mid(x-32)\Leftrightarrow x-32\in 125\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in 32+125\mathbb{Z}$$

נשים לב שגם אם $x=32$ אז $x\in 32+125\mathbb{Z}$ ומכיון שכל הגרירות הנ"ל דו כיווניות ניתן להסיק

$B_{d_5}\left(32,\frac{1}{25}\right)=32+125\mathbb{Z}$.

<u>שאלה 3</u>

<u>טענת עזר:</u>

תהי $p\in B(x,R)$ ונניח שמתקיים $0<r\le R-d(x,p)$, אזי $B(p,r)\subseteq B(x,R)$.

<u>הוכחת טענת עזר:</u>

יהי $z \in B(p,r)$ אזי $d(p,z) < r$. $d(z,x) \le d(z,p) + d(p,x) < r + d(p,x) \le R$ ולכן $z \in B(x,R)$.

הערה: אכן מתקיים $0 < R - d(x,p)$ שכן $p \in B(x,R)$.

מש"ל טענת עזר.

כעת, יהי $r = \min\{r_2 - d(p,x_2), r_1 - d(p,x_1)\}$. מהעובדה ש- $p \in B(x_1,r_1)$ ומטענת העזר נובע ש- $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1)$ (הציבו $x = x_1, R = r_1$). באופן דומה נקבל $B(p,r) \subseteq B(x_2,r_2)$.

<u>שאלה 4</u>

א. נניח ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף אזי קיימים $x \in X$, $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $x_n = x$. נראה שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל x. יהי $\varepsilon > 0$ אזי לכל $n \ge n_0$ מתקיים $d(x_n,x) = d(x,x) = 0 < \varepsilon$.

ב. מספיק להוכיח (עפ"י סעיף א') שכל סדרה מתכנסת במ"מ (X,d_Δ) היא קבועה לבסוף.נניח $\{x_n\} \xrightarrow{d_\Delta} x$, אזי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $d_\Delta(x_n,x) < 1$; אבל זה אומר בהכרח שלכל $n \ge n_0$ $d_\Delta(x_n,x) = 0$ (המרחקים האפשרים הם רק אפס או 1). מכאן $x_n = x$ לכל $n \ge n_0$.

<u>שאלה 5</u>

א. הוכחה:

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \exists i_0 \in I \quad f(x) \in B_{i_0}$$

$$\Leftrightarrow \exists i_0 \in I \quad x \in f^{-1}\left(B_{i_0}\right) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

ב. הפרכה ע"י דוגמא נגדית יהי $X = Y = \mathbb{R}$ $f : X \to Y$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$. $A_1 = [0,1], \quad A_2 = [2,3]$ מתקיים:

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\varnothing) = \varnothing \ne \{0\} = f(A_1) \cap f(A_2)$$

שאלה 6

א. יהי $y\in f\left(f^{-1}(A)\right)$, אזי קיים $x\in f^{-1}(A)$ כך ש- $f(x)=y$ וכן

$x\in f^{-1}(A)\Leftarrow f(x)\in A$, ונקבל בסה"כ $y\in A$.

ב. כבר יש לנו הכלה בכיוון אחד, נוכיח את ההכלה בכיוון השני:

$f\left(f^{-1}(A)\right)\supseteq A$. יהי $y\in A$. מכיוון ש f "על" נקבל שקיים $x\in f^{-1}(A)$ כך ש-

$f(x)=y$. מכאן $y\in f\left(f^{-1}(A)\right)$.

דוגמא נגדית במקרה בו f לא "על". נניח $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=0$ אזי

$f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right)=\{0\}\neq\mathbb{R}$.

ג. יהי $x\in B$, אזי $f(x)\in f(B)$ ולכן $x\in f^{-1}\left(f(B)\right)$.

ד. כבר יש לנו הכלה בכיוון אחד, נוכיח את ההכלה בכיוון השני:

$f^{-1}\left(f(B)\right)\subseteq B$. יהי $x\in f^{-1}\left(f(B)\right)$, אזי $f(x)\in f(B)$. נראה שבהכרח $x\in B$. אחרת,

קיים $x\neq x_1\in B$ כך ש- $f(x)=f(x_1)$. אך זו סתירה לכך ש- f חח"ע. מכאן $x\in B$.

דוגמא נגדית במקרה בו f לא חח"ע. אותה דוגמא כמו בסעיף ב' רק שהפעם נקח

$B=\{5\}$ מתקיים

$$f^{-1}\left(f(B)\right)=f^{-1}\left(f(\{5\})\right)=f^{-1}\left(\{0\}\right)=\mathbb{R}\neq\{5\}$$

שאלת בונוס

נניח $a_2\neq a_1$ וכן $r_1<r_2$ ונניח בשלילה ש $B(a_2,r_2)\subseteq B(a_1,r_1)$ אזי

$a_2\in B(a_2,r_2)\subseteq B(a_1,r_1)$ ולכן $\|a_2-a_1\|<r_1$. יהי $v=a_1+r_1\cdot\dfrac{a_2-a_1}{\|a_2-a_1\|}$ (שימו לב אם

היינו ב $\mathbb{R}^2$ המשמעות הגיאומטרית היתה חיבור של הוקטור a_1 לוקטור עם נורמה r_1 בכיוון

של a_2-a_1) מתקיים:

$$\|v-a_2\|=\left\|a_1+r_1\cdot\frac{a_2-a_1}{\|a_2-a_1\|}-a_2\right\|=\left\|(a_2-a_1)\cdot\left(\frac{r_1}{\|a_2-a_1\|}-1\right)\right\|$$

$$=\left\|(a_2-a_1)\frac{r_1-\|a_2-a_1\|}{\|a_2-a_1\|}\right\|=$$

$$\frac{\|a_2-a_1\|}{\|a_2-a_1\|}\left|r_1-\|a_2-a_1\|\right|=r_1-\|a_2-a_1\|<r_1<r_2$$

לכן $v\in B(a_2,r_2)$ אבל $v\notin B(a_1,r_1)$ שכן: $\|v-a_1\|=r_1$.

הערה : $a_2 \neq a_1$ ולכן בהכרח $\|a_2 - a_1\| \neq 0$ ומכאן שהביטוי $\frac{a_2 - a_1}{\| a_2 - a_1 \|}$ מוגדר. קיבלנו סתירה להנחה .