

מבוא לטופולוגיה - תרגיל 1

1. יהיו A, B, C תת-קבוצות של הקבוצה X .
הוכיחו/הפריכו שארבעת הטעיונות הבאות שקולות
(זאת אומרת, כולן מתקיימות או כולן לא מתקיימות):

$$A \subseteq B \quad (1)$$

$$A \cap B = A \quad (2)$$

$$A \cup B = B \quad (3)$$

$$B^c \subseteq A^c \quad (4)$$

2. הוכיחו/הפריכו:

הקבוצה E מכילה רק איבר אחד אם ורק אם
לכל קבוצה $A \neq \emptyset$ קיימת רק פונקציה אחת מ- A ל- E .

3. יהיו $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ פונקציות.

הוכיחו/הפריכו:

א' אם $f \circ g$ היא חח"ע, אז g היא חח"ע.
ב' אם $f \circ g$ היא על, אז f היא על.

4. תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה.

תזכורת:

אומרים ש- f מצטמצמת משמאל, אם לכל שתי פונקציות g, h מקבוצה כלשהיא ל- A מתקיים:

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

אומרים ש- f מצטמצמת מימין, אם לכל שתי פונקציות g, h מ- B לקבוצה כלשהיא מתקיים:

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

הוכיחו:

א' f מצטמצמת משמאל אם ורק אם f חח"ע.

ב' f מצטמצמת מימין אם ורק אם f על.

5. תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה.

הוכיחו:

$$f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c \quad B \supseteq D$$

א' לכל $D \subseteq B$
ב' $f(X^c) = (f(X))^c$ לכל $A \supseteq X$ אם ורק אם f היא פונקציה חח"ע ועל.