תרגול 6

אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני

תהיי $f(x)$ פונקציה מוגדרת ולא חסומה בקטע חצי פתוח $[a,b)$ ונניח שלכל $\varepsilon>0$, $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b-\varepsilon]$, כך ש $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$. לכל $\varepsilon>0$ האינטגרל בקטע $[a,b-\varepsilon]$ קיים ולכן נוכל להגדיר את $I(\varepsilon)=\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

הגדרה

הגבול $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon)$ נקרא האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b)$ ומסומן ע"י $I=\int\limits_a^b f(x)dx$.

אם הגבול קיים נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b)$ מתכנס. אחרת נאמר כי הוא מתבדר.

הערה

באופן דומה ניתן להגדיר את האינטגרל הלא אמיתי בקטע $(a,b]$.

דוגמאות

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ אינטגרל לא אמיתי מסוג שני מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$ אינטגרבילית בקטע $[0+\varepsilon,1]$ לכל $\varepsilon>0$ ובנוסף $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

2. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^e \frac{dx}{x\ln x}$ אינטגרל לא אמיתי מסוג שני מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{x\ln x}$ לא מוגדרת עבור $x=1$.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^e \frac{dx}{x\ln x}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\ln x}+\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}.$$

האינטגרל $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\ln x}$ לא אמיתי מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{x\ln x}$ אינטגרבילית בקטע $\left[\frac{1}{2},1-\varepsilon\right]$ לכל $\varepsilon>0$ ובנוסף $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

האינטגרל $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}$ לא אמיתי מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{x\ln x}$ אינטגרבילית בקטע $[1+\varepsilon,e]$ לכל $\varepsilon>0$ ובנוסף $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

סה"כ האינטגרל $\int\limits_{\frac{1}{2}}^e \frac{dx}{x\ln x}$ לא אמיתי מסוג שני.

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$ לא אמיתי מכיוון שהפונקציה $\tan x$ אינטגרבילית בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ לכל $\varepsilon>0$ ובנוסף $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$ ולכן האינטגרל לא אמיתי מסוג שני.

תרגיל

לאילו ערכים של הפרמטר p האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ מתכנס.

פתרון

עבור $p>1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{x^{p-1}\cdot(1-p)}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{1^{p-1}\cdot(1-p)}+\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right] = \frac{-p}{(1-p)} - \lim_{a\to 0^+}\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}$$

מכיוון ש $p>1$ נקבל ש $\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right] = \infty$ ואז האינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

עבור $p=1$ נקבל

$$\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+}\left[\ln x\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[\ln 1 - \ln a\right] = \ln 1 - \lim_{a\to 0^+}\ln a.$$

מכיוון שהגבול $\lim_{a\to 0^+}\ln a$ לא סופי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

עבור $p<1$.

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{x^{p-1}\cdot(1-p)}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{1^{p-1}\cdot(1-p)}+\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right] = -\frac{p}{(1-p)} - \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right]$$

מכיוון ש $p<1$ נקבל ש $\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-p}{b^{p-1}\cdot(1-p)}\right] = 0$ ואז האינטגרל הלא אמיתי מתכנס.

תרגיל

לאילו ערכים של הפרמטר p מתכנס האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x\ln^p x}$.

פתרון

נשתמש בשיטת ההצבה

נציב $t=\ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\ln^p x} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^p}.$$

האינטגרל האמיתי מתבדר לכל ערך של p.

מכיוון ש $\int_{-1}^0 \frac{dt}{t^p}$ מתבדר עבור $p\ge 1$ ואילו האינטגרל $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^p}$ מתבדר עבור $p<1$.

מבחן השוואה

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ שתי פונקציות $0\le g(x)\le f(x)$ לכל x בקטע $[a,b]$. אזי

א. אם האינטנגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

אם האינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר.

מבחן המנה

בהינתן $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $[a,b]$, ונניח שקיים הגבול $L=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ אזי

א. אם $0<L<\infty$ אז שני האינטגרלים $\int_a^b f(x)dx$ ו $\int_a^b g(x)dx$ מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד.

ב. אם $L=0$ ואם האינטגרל $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

ג. אם $L=\infty$ ואם האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס.

<u>תרגיל</u>

האם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$?

<u>פתרון</u>

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ נשתמש במבחן ההשוואה מנה $\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}:\frac{1}{\sqrt{x}}$ בנוסף מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}=1$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס ולכן גם $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$.

<u>מעבר מאינטגרל לא אמיתי מסוג שני לאינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון</u>

<u>תרגיל</u>

יהי $1>b>0,0<\alpha$ הוכיחו כי $\int_0^b\frac{1}{x|\ln(x)|^\alpha}dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha>1$.

<u>פתרון</u>

נציב $t=\ln x \Leftarrow dt=\frac{dx}{x}$ מכיוון ש $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ אז מספיק לבדוק התכנסות או התבדרות של $\int_{-\infty}^{\ln b}\frac{1}{(-t)^\alpha}dt$ הראינו בהרצאה שכאשר $0<\alpha\le 1$ האינטגרל מתבדר וכאשר $\alpha>1$ $\int_{-\infty}^{\ln b}\frac{1}{(-t)^\alpha}dt$ מתכנס.

<u>התכנסות בהחלט</u>

<u>הגדרה</u>

אם $\int_I|f(x)|dx$ מתכנס, אז נאמר שהאינטגרל $\int_I f(x)dx$ מתכנס בהחלט.

אם $\int_I|f(x)|dx$ מתבדר, אבל $\int_I f(x)dx$ מתכנס, אז נאמר שהאינטגל $\int_I f(x)dx$ מתכנס בתנאי.

<u>תרגיל</u>

בדוק התבדרות/התכנסות בהחלט/התכנסות בתנאי $\int_0^\infty e^{-2x}\cos x dx$

<u>פתרון</u>

נבדוק תחילה התכנסות בהחלט $\int_0^\infty e^{-2x}|\cos x|dx=\int_0^\infty|e^{-2x}\cos x|dx$.

נשים לב ש $f(x)=e^{-2x}|\cos x|$ פונקציה אי שלילית ומתקיים $e^{-2x}|\cos x|\le e^{-2x}$ ולכן מהתכנסות של

$\int_0^\infty e^{-2x}dx$ ניתן להסיק התכנסות של $\int_0^\infty |e^{-2x}\cos x|dx$ ולכן האינטגרל מתכנס בהחלט.

<u>תרגיל</u>

בדוק התבדרות/התכנסות בהחלט/התכנסות בתנאי $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}dx$.

<u>פתרון</u>

נבדוק תחילה האם האינטגרל $\int_0^1 \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right|dx$ מתכנס.

נשים לב שלכל x מתקיים: $0\le\cos^2\frac{1}{x}\le\cos\frac{1}{x}$.

ממבחן ההשוואה הראשון מספיק להראות שהאינטגרל $\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{1}{x}}{x}dx$ מתבדר כדי להראות שהאינטגרל

$\int_0^1 \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right|dx$ מתבדר.

נשתמש בזהות $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+1)$.

$\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{1}{x}}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}dx$. המחובר השני מתבדר, ולכן מספיק להראות שהמחובר הראשון מתכנס כדי להוכיח את הדרוש.

נבדוק שאכן האינטגרל $\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}dx$ מתכנס.

נשתמש בשיטת ההצבה. נציב $t=\frac{1}{x}$ ואז $dt=-\frac{1}{x^2}dx$.

אם נציב $x=1$ נקבל $t=1$ ובנוסף $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ ולכן מספיק לבדוק את התכנסות האינטגרל הלא

אמיתי מסוג ראשון $\int_\infty^1 \frac{1}{t}\cos(2t)dt$ $\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}dx=-\int_0^1\left(x\cos\frac{2}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_\infty^1\frac{1}{t}\cos(2t)dt$.

נשאר לבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_\infty^1\frac{1}{t}\cos(2t)dt$.

נשתמש במבחן דריכלה: $f(t)=\frac{1}{t}$ ומתקיים $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0$.

$G(x)=\int_1^x \cos(2t)dt=\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_1^x=\frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{1}{2}\sin 2 \Rightarrow |G(x)|\le 1$ וממשפט דריכלה נקבל

שהאינטגרל $\int_\infty^1 \frac{1}{t}\cos(2t)dt$ מתכנס ואז האינטגרל $\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}dx$ מתכנס ולכן האינטגרל $\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{1}{x}}{x}dx$ מתבדר.

כפי שהראינו ש $\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}dx$ מתכנס ניתן להראות שהאינטגרל $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}dx$ מתכנס.

הראינו ש $\int_0^1 \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right|dx$ מתבדר, ולכן האינטגרל מתכנס בתנאי.