בוחן בטופולוגיה

14.4.16 ו' ניסן התשע"ו

משך הבוחן 90 דקות.

בבוחן 3 שאלות ללא בחירה. משקל כל שאלה 33 נקודות (+נקודה אחת מתנה). הנקודות מתחלקות בין סעיפים בשאלה שווה בשווה.

בנוסף יש שאלת בונוס במשקל 10 נקודות.

נמקו היטב את תשובותיכם.

1. תהי X הקבוצה של כל הסדרות הממשיות. נגדיר על X מטריקה לפי: $d(\{a_n\},\{b_n\})=0$ אם $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$ שוות. אחרת, $d(\{a_n\},\{b_n\})=\frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m \neq b_m$ (אין צורך להוכיח שזו מטריקה). נסמן ב Y את קבוצת הסדרות הקבועות.

   (א) הוכיחו כי Y היא קבוצה סגורה.

   (ב) מצאו את $\operatorname{int} Y$ ואת ∂Y.

   (ג) האם המרחב Y קשיר? (ביחס לטופולוגיית תת המרחב).

2. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau=\{O_n \mid n\in\mathbb{Z}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{Z}\}$$

   כאשר

$$O_n=\{n,n+1,n+2,\dots\}$$

   (א) הוכיחו כי $(\mathbb{Z},\tau)$ אכן מרחב טופולוגי.

   (ב) מצאו את $\operatorname{cl} O_n$.

   (ג) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n\in\mathbb{Z}$.

3. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, תהי $A\subseteq X$ ותהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $f(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int} f(A)$

(ב) אם f הומאומורפיזם אז $f(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} f(A)$.

שאלת בונוס (5 נק' לכל סעיף): יהי X מרחב טופולוגי ותהי $Y \subseteq X$ תת קבוצה. X משרה על Y טופולוגיית תת מרחב. תהי $A \subseteq Y$. נסמן ב $\mathrm{cl}_X(A)$ $\mathrm{cl}_Y(A)$ את הסגור של A ביחס לטופולוגיה של X ו Y בהתאמה. בדומה נסמן $\mathrm{int}_X(X)$ ו $\mathrm{int}_Y(A)$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y$
- $\mathrm{int}_Y(A) = \mathrm{int}_X(A) \cap Y$