הרצאה 1: מתמטיקה בדידה

לוגיקה

הגדרה - "אם לא $\underbrace{\text{תאכל}}_{A}$, $\underbrace{\text{יבוא שוטר}}_{B}$"

אם לא A, אז B

"כשאני $\underbrace{\text{עייף}}_{A}$ $\underbrace{\text{ורעב}}_{B}$, אני $\underbrace{\text{עצבני}}_{C}$ או שאני $\underbrace{\text{הולך לישון}}_{D}$"

אם (A וגם B) אז (C או D)

ערך אמת - לכל פסוק נצמד ערך אמת T/F

T : $1<2$

$x<2$ - לא פסוק

קשרים לוגיים - פונקציה לוגית המחברת אטומים

$\neg P$ = השלילה של P

$P \wedge Q$ וגם

$P \vee Q$ או

$P \oplus Q$ (XOR - P או Q אבל לא P וגם Q)

$$P \text{ xor } Q = (P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q)$$

[או אקסקלוסיבי]

טבלות אמת

$\neg P$	P
F	T
T	F

$P \vee Q$	P	Q
T	T	T
T	T	F
T	F	T
F	F	F

$P \text{ xor } Q$	P	Q
F	T	T
T	T	F
T	F	T
F	F	F

גרירה: $\boxed{P \rightarrow Q}$: אם P, אז Q

$\boxed{P \leftrightarrow Q}$: P אם"ם Q

$(P \text{ iff } Q)$

אם"ם

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \boxed{\neg (P \wedge \neg Q)}$$

$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	P	Q
T	T	T	T

F	F	T	F
F	T	F	T
T	T	F	F

הערה: לכל פסוק P:

① $T \wedge P = P$ ③ $F \wedge P \equiv F$

② $T \vee P = T$ ④ $F \vee P = P$

הערה: ישנה חשיבות לסדר:

$$\begin{cases} T & P := (\overset{F}{A} \wedge \overset{F}{B}) \vee \overset{T}{C} \\ F & Q := \overset{F}{A} \wedge (B \vee \overset{T}{C}) \end{cases}$$

כדי להראות שפסוקים אלו אינם שקולים, עלינו למצוא ערכי אמת ל- A,B,C עבורם P,Q מקבלים ערכי אמת שונים זה מזה.

$$A=F,\quad B=F,\quad C=T \Rightarrow \begin{matrix} P : T \\ Q : F \end{matrix}$$

משפט נכון: T

"$2+2=4$" אם ורק אם המשפט האחרון של פרמה נכון".

$T \quad P \Leftrightarrow Q$

[כל שני פסוקי אמת, "שקולים": $P \Leftrightarrow Q$ מקבל T]

קבלו אמת מורכבת יותר:

$$P := ((A \vee B) \to A) \to (\neg B \vee A)$$

הוכיחו: תמיד מקבל ערך אמת.

P	$\neg B \vee A$	$(A \vee B) \to A$	$A \vee B$	A	B
T	T	T	T	T	T (F)
T	T	T	T	T	F (T)
T	F	F	T	F	T (F)
T	T	T	F	F	F (T)

פסוק כזה נקרא <u>טאוטולוגיה</u>.

<u>טאוטולוגיות שימושיות:</u>

(i) $A \wedge B \to A$

(ii) $A \to A \vee B$

(iii) $A \vee \neg A$ "השלישי הנמנע"

(iv) $(A \wedge (A \to B)) \to B$ "מודוס פוננס"

(v) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

"קונטרה-פוזיטיב" או "הוכחה בשלילה"

<u>הוכחה ש-(v) הוא טאוטולוגיה:</u>

$A \to B \overset{\text{שקול לוגית}}{\Longleftrightarrow} \neg(A \wedge \neg B)$

$\neg B \to \neg A \Longleftrightarrow \neg(\neg B \wedge \neg(\neg A)) =$

$= \neg(\neg B \wedge A) =$ סימטריה של $\wedge$

$= \neg(A \wedge \neg B)$

$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg(P \wedge \neg Q))$

<u>מילה על קשרים:</u>

[illegible]:

$$\big((A\wedge(B\vee C))\big)\leftrightarrow\big((A\wedge B)\vee(A\wedge C)\big)$$

טאוטולוגיה.

הוכחה:

① אם $A=F$:

ערך האמת של צד שמאל הוא F.
אבל צד ימין מקבל את ערך האמת של

$$\underbrace{(F\wedge B)}_{F}\vee\underbrace{(F\wedge C)}_{F}=F.$$

ולכן הגרירה הדו-כיוונית מתקיימת (במקרה זה).

② אם $A=T$:

צד שמאל מקבל את ערך האמת של $B\vee C$.
צד ימין מקבל את ערך האמת של

$$\underbrace{(T\wedge B)}_{B}\vee\underbrace{(T\wedge C)}_{C}=B\vee C$$

ולכן הגרירה הדו-כיוונית מתקיימת גם במקרה זה.
מ.ש.ל.

חוק פילוג נוסף:

$$\big(A\vee(B\wedge C)\big)\leftrightarrow\big((A\vee B)\wedge(A\vee C)\big)$$

טאוטולוגיה.

הוכחה: נחלק למקרים לפי ערך האמת של A.

חוקי דה-מורגן: [שלילת קשרים]

$$\big(\neg(A\wedge B)\big)\leftrightarrow\big(\neg A\vee\neg B\big)$$

$$\big(\neg(A\vee B)\big)\leftrightarrow\big(\neg A\wedge\neg B\big)$$

טאוטולוגיות.

דוגמה:

* "נריץ מפים ונקבל קידען"

השלילה: או שלא הורצתם מפים, או שלא קיבלתם קידען.

* "נהיה בסדר A או נהיה דסגר B" $A \vee B$

השלילה: גם לא נהיה בסדר, וגם לא נהיה דסגר.

פרדיקטים

$\varphi(x) =$ "$x < 2$"

"$1 < 2$" T

קיים מספר גדול מ-1 ← ?

* משתנים
* כמתים

הגדרה: פרדיקט הוא פונקציה המקבלת משתנה ומחזירה ערך אמת (T/F).

דוגמאות לפרדיקטים: (Phi)

* $\varphi(x) =$ "x הוא תפוח"

$(\mathbb{Z})$ $\varphi(x,y) =$ "$x < y$"

כמתים: לכל x $\varphi(x)$ מקבל ערך T → $\boxed{\forall x \varphi(x)}$

קיים x עבורו ... T $\boxed{\exists x \varphi(x)}$

מה אומר הפרדיקט הבא (בתחום $\mathbb{Z}$):

$$\psi(x) = \forall y\big(\exists z(yz=x) \rightarrow (y=1 \lor y=-1 \lor y=x \lor y=-x)\big)$$

מתקיים $\psi(x)=T$ כאשר:

[לכל y, אם קיים z כך ש- $x=y\cdot z$ אזי: "$y\in\{1,-1,x,-x\}$"]

$\psi(x)$ = "x הוא ראשוני".

$\psi(6)=F$

$y=2$

$$\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \{T,F\}$$

$2,3,5,7,11,\dots$ — T

$4,6,8,9,10,\dots$ — F

$\psi(x)=$

$$\forall y\big(\exists z(yz=x) \rightarrow ((y=1)\lor(y=-1)\lor(y=x)\lor(y=-x))\big)$$

---

y, z — משתנים מכומתים

x — משתנה חופשי

דוגמה:

T $\quad \forall x\big(x<0 \rightarrow \forall y(\neg(y^2=x))\big)$

x, y — משתנים
∀ - כמת
¬, → - קשרים

$$\left(\begin{matrix} < \\ = \\ y^2 \end{matrix}\right)$$

פונקציות
יחסים
מחוברים לתחום.

תחום $\mathbb{Z}$.

דוגמה: $\varphi(x) = \exists y\,(y^2 = x)$

$\underline{\underline{\varphi(x)}}$ $1, 4, 9, \ldots$

ערכי האמת של הפסוקים:

$\boxed{\forall x\,\varphi(x)}$	F
$\boxed{\exists x\,\varphi(x)}$	T

$$\varphi(x) : \mathbb{Z} \longrightarrow \{T, F\}$$

$1, 4$
T, F

$\exists x\,\varphi(x)$ T

$\varphi(x)$ מקיים T לכל x

$$\varphi(x) = \exists y\,(x + y = 17)$$

$\exists x\,\varphi(x)$ T

$\forall x\,\varphi(x)$

כדי להוכיח כי ערך האמת של $\exists x\,\varphi(x)$ הוא T, מספיק למצוא דוגמה: $x = 9$, $y = 8$.

כדי להוכיח כי ערך האמת של $\forall x\,\varphi(x)$ הוא T, צריך להראות שלכל x בתחום (=מס' שלם) מתקיים $\varphi(x)$, כלומר לכל x שלם קיים y עבורו

ו- $x+y=17$.

[זה נכון, כי לכל x ניתן לקחת $y=17-x$.

$$\forall x\, \varphi(x) \to \exists x\, \varphi(x)$$

תלוי קיום.

($\mathbb{Z}$) אם ביקום קיים לפחות x אחד, T.

אך מה אם אין ביקום אף x?

"כל דג לבן מדבר, מגשים משאלות".

[יקום של דגים לבנים מדברים...]

נתבונן ביקום של מספרים ריבועיים

$\to \{1,4,9,16,25,\dots\}$

$$\varphi(x) = \exists y\,(x=y^2)$$

(F) $\forall x\, \varphi(x)$ ~~T~~

לדוגמה: זה נכון עבור $x=4$.

$x=4 \quad \exists y=2 : 4=2^2$

2 אינו ביקום החדש שהגדרנו!

$\forall x\, \varphi(x)$ = הפסוק

דיקדוק רגיל הלוגי

$\forall x \, \varphi(x)$

$\forall x$ -

פרדיקט

שיטות הוכחה:

① הוכחה בשלילה – מניחים את שלילת הטענה המבוקשת, ומגיעים לסתירה.

"יש ∞ ראשוניים"

הוכחה: נניח בשלילה שקיים מספר סופי של ראשוניים: $p_1, \dots, p_n$.

נתבונן במספר:

$$x = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$$

x אינו מתחלק באף $p_1, \dots, p_n$. לכן,
x ראשוני בעצמו. אבל,

$$x > p_1, p_2, \dots, p_n$$

בסתירה לכך ש- $\{p_1, \dots, p_n\}$ היא רשימת הראשוניים המלאה.

לפיכך יש ∞ ראשוניים.

... רציונלי.

"$\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי" $\qquad b\neq 0$, $\frac{a}{b}$

הוכחה: נניח בשלילה כי $\sqrt{2}$ רציונלי.
מכאן, ניתן להציג אותו כשבר מצומצם:

$p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$ $\qquad \sqrt{2}=\frac{p}{q}$ $\qquad$ שבר מצומצם.

$$2=\frac{p^2}{q^2}$$

ולכן: $\qquad p^2=2q^2 \quad (*)$

מכאן, p^2 זוגי. אם p^2 זוגי, אז גם p זוגי.
נכתוב: $p=2x$. נציב ב-$(*)$:

$$4x^2=2q^2 \Rightarrow 2x^2=q^2$$

מכאן ש-q^2 זוגי, ולכן q זוגי.
בסתירה לכך שהשבר מצומצם. מ.ש.ל.

② "בלי הגבלת הכלליות" [בה"כ, W.L.O.G]
הנחה שאינה מגבילה חלק מהנתון, אך ברור כי היא מכסה את כל האפשרויות.

"לכל x,y, מספר האי-זוגיים מבין $\{x,y,x+y\}$ זוגי"

הוכחה:
בה"כ x,y שניהם זוגיים, אז גם $x+y$ זוגי.
לכן מס' האי-זוגיים הוא 0 [=זוגי].

אם x,y שניהם לא זוגיים, אז $x+y$ זוגי.
לכן מס' הא' הוא 2 [=זוגי].

אם אחד מהם בדיוק x,y זוגי - $\boxed{\text{בהכ"ל}}$ נניח כי x זוגי ו-y לא. אז $x+y$ לא, ולכן
מס' הא' נקודה הוא 2 [=זוגי].
מ.ש.ל.

- - - - - - - -

"יש מס' הוא ראשון"
הוכחה: ~~בהכ"ל~~ נקח $x=3$, הוא ראשון ואי-זוגי.

- - - - - - - -

③ הוכחת טענות מכומתות

$\boxed{\exists x\, \varphi(x)}$: מספיק לתת דוגמה אחת ל-$x$ עבורו $\varphi(x)$ True.

[הוכחה "קונסטרוקטיבית"]

$\boxed{\forall x\, \varphi(x)}$: צריך לקחת x כללי ולהוכיח כי מתקיים $\varphi(x)$ T.

"משחק" - היריב מאתגר x ואנחנו צריכים להראות $\varphi(x)$.

דוגמה:
ביקום $(0,\infty)$ (מס' חיוביים): $\mathbb{R}_{>0}$

$$\forall x\, \underbrace{(\exists y\, (0<y<x))}_{\varphi(x)} \qquad \forall x\, \varphi(x)$$

הוכחה:
$\forall$ נניח שנתון לנו $x>0$. נראה כי $\varphi(x)$ מתקיים
סרק אמית.

[ב] אלכן, נקח $y=\frac{x}{2}$ מקיים $0<y<x$ מ.ש.ל.

④ "מספיק להוכיח/להראות..." (מ"ל)

"קיים ראשוני שגדול מ-10^{200}".

<u>הוכחה:</u> מספיק להוכיח שקיימים ∞ ראשוניים.

אבל את זה כבר הוכחנו. מ.ש.ל.

⑤ <u>חלוקה למקרים</u>

<u>טענה:</u> תהא $x_1, x_2, x_3, \dots$ סדרה של מספרים ממשיים.

אזי קיימת תת-סדרה [אינסופית]

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$

כך ש- $x_{n_1}\ge x_{n_2}\ge x_{n_3}\ge\dots$

או כך ש- $x_{n_1}\le x_{n_2}\le x_{n_3}\le\dots$.

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$ תת-סדרה:

$3, 7, 17, \dots$

$n_1=2, n_2=4, n_3=7$

$x_1, x_2, x_3, \dots$

$x_2, x_4, x_7, \dots$

<u>הערה:</u> נאמר כי x_n הוא "גדול" אם לכל $N>n$,

מתקיים: $x_N \le x_n$.

נחלק למקרים –

$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$

$x_n \ge x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$

1 יש בסדרה ∞ מספרים "גדולים".

נניח כי יש ∞ מס' גדולים, נסמנם:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$$

מהגדרת המספר "גדול", נקבל כי לכל i,

$$x_{n_i} \ge x_{n_{i+1}}$$

בפרט, $x_{n_1} \ge x_{n_2} \ge x_{n_3} \ge \dots$ כנדרש.

2 נותר לטפל במקרה שיש רק מס' "גדולים" סופי.

נניח שיש רק מס' "גדולים" סופי, נסמנם:

$x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}$. ← כל הגדולים במס' בסדרה.

לכן $m > m_k$, מתקיים ש- x_m אינו גדול.

(*) בפרט, לכל $n > m_k$, קיים $n' > n$ עבורו:

$$x_n < x_{n'}$$

מס' גדול

$$\varphi(x_i) = \forall j > i\,(x_i \ge x_j)$$

$$\neg\varphi(x_i) = \exists j > i\,(\neg(x_i \ge x_j))$$

$L = \exists j > i \, (x_i < x_j)$

$x_{m_1} \cdots x_{m_k} \qquad x_n \overset{<}{\frown} x_{n'}$

ניקח $n_1 = m_k + 1$. לכן קיים $n_2 > n_1$ עבורו $x_{n_1} < x_{n_2}$ [מ-(*)].

וגם $n_2 > m_k$ ולכן שוב מ-(*) קיים $n_3 > n_2$: $x_{n_2} < x_{n_3}$

וכן הלאה: $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots$ כנדרש. מ.ש.ל.

מבוא לאינדוקציה:

כדי להוכיח טענה φ לכל $n \in \mathbb{N}$, מספיק:

(1) $\varphi(1)$ True

(2) $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$ True

דוגמה: [טריוויאלית] 1.

$\varphi(n) = " \underline{1 + 2 + \cdots + n} = \frac{n(n+1)}{2} "$

באינדוקציה:

(1) $n=1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ True.

(2) $\boxed{\varphi(n) \to \varphi(n+1)}$:

$(\ldots) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{\ldots}$

$$\underbrace{1+2+\dots+n}_{\substack{\| \\ \frac{n(n+1)}{2}}}+(n+1)=\frac{(n+1)(\dots)}{2}$$

בגלל $\varphi(n)$ True

לכן:

$$\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n^2+n+2(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

33 מימין:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

טענה: הנחנו את נכונות $\varphi(n)$
והוכחנו את נכונות $\varphi(n+1)$.

טענה: "כל מספר טבעי הוא אי-רציונלי".

$\varphi(n)=$"n אי-רציונלי" $\quad (\varphi(n)\rightarrow\varphi(n+1))$ (2) $\cancel{\varphi(1)}$

נניח כי n אי-רציונלי.
בשלילה, אם $n+1$ כן רציונלי אז
$n=(n+1)-1$
הפרש של רציונליים, לכן n רציונלי, סתירה.

ההוכחה אינה נכונה כי לא הוכחנו $\varphi(1)$!

הערה: לא אפשר להשתמש באינדוקציה (כפשוטה) על R,

ש...

"סדר טוב" ≠ (well ordered set)

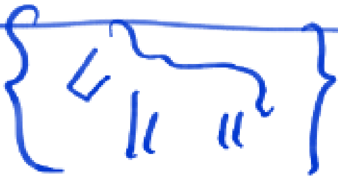
<u>טענה</u>: כל הסוסים שחורים.

<u>הוכחה</u>:

ראשית, נוכיח כי כל הסוסים בעולם באותו צבע.
מכיוון שקיים לפחות סוס אחד שחור, הטענה נובעת.

נוכיח כי כל הסוסים בעולם באותו צבע באינדוקציה על מספר הסוסים.

נוכיח: $\boxed{\text{לכל } n\in\mathbb{N}\text{, כל קבוצה בת } n \text{ סוסים היא מאותו צבע.}}$ $\varphi(n)$



<u>$n=1$</u>: ברור.

<u>$n \to n+1$</u>:

יהי X קבוצה בת $n+1$ סוסים.

ניקח סוס שרירותי מהקבוצה $h\in X$.

נתבונן ב-X בלי h. גודלה הוא n.

לכן לפי <u>הנחת האינדוקציה</u>, קבוצה זו מאותו צבע.

ניקח h' סוס אחר ב-X, ונוציא אותו.

ולכן כל X מאותו צבע.

מ.ש.ל.

OK

$\varphi(1)$

ok!

$\varphi(3) \to \varphi(4)$

$\varphi(4) \to \varphi(5)$

~~$\varphi(1) \to \varphi(2)$~~

~~$\varphi(2) \to \varphi(3)$~~