תרגול מספר 9 – צורת ז'ורדן ומכפלות פנימיות

<u>בלוק ז'ורדן:</u>

בלוק ז'ורדן הוא מטריצה מהצורה $J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}\in F^{n\times n}$. קל לוודא ש λ הינו הע"ע היחיד של הבלוק. הריבוי האלגברי שלו הוא n ואילו הריבוי הגיאומטרי שלו הינו אחד.

<u>משפט צורת ז'ורדן:</u>

תהי מטריצה A כך שהפולינום שלה מתפרק לגורמים ליניאריים - $f_A(x)=(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$ ($\lambda_1,\dots,\lambda_r$ שונים זה מזה), ומתקיים $m_A(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_r)^{m_r}$. אזי A דומה למטריצה שעל האלכסון שלה בלוקי ז'ורדן והשאר אפסים, כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1. לכל ע"ע λ_i קיים לפחות בלוק ז'ורדן אחד **בגודל** m_i וכל שאר הבלוקים של הע"ע הם **מגודל** קטן שווה לזה.
2. **סכום הגדלים** של בלוקי הז'ורדן עבור ע"ע מסויים שווה **לריבוי האלגברי** שלו (הרי זה מספר הפעמים שהוא צריך להופיע באלכסון).
3. **מספר הבלוקים** עבור ע"ע מסויים שווה **לריבוי הגיאומטרי** שלו.
4. **יחידות** – יש לכל מטריצה צורת ז'ורדן יחידה עד כדי סדר הבלוקים באלכסון.

<u>דוגמא:</u>

תהי מטריצה A כך ש $f_A=(x-2)^4(x-5)^3$ ו $f_A=(x-2)^2(x-5)^3$ אזי צורת הז'ורדן של המטריצה היא אחת מהבאות: $\begin{pmatrix}5&1&0\\0&5&1\\0&0&5\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ או

$$\begin{pmatrix}5&1&0\\0&5&1\\0&0&5\end{pmatrix}\oplus(2)\oplus(2)\oplus\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

מצא את כל צורות הז'ורדן עבור מטריצה A המקיימת $f_A=x^2(x-1)^2$. עבור כל צורת ז'ורדן אמור מהו הפולינום המינימלי המתאים לה.

פתרון:

א. $m_A=x(x-1)$, $(1)\oplus(1)\oplus(0)\oplus(0)$

ב. $m_A=x(x-1)^2$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\oplus(0)\oplus(0)$

ג. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus (1) \oplus (1)$, $m_A = x^2(x-1)$

ד. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m_A = x^2(x-1)^2$

<u>תרגיל:</u>

מצא מטריצות בעלות פולינום מינימלי ואופייני זהים, שאינן דומות

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ברור שהפולינום האופייני של שתי המטריצות הינו $(x-2)^4$. החזקה של הפולינום המינימלי הינה גודל הבלוק הגדול ביותר, בשני המקרים זה שתים.

<u>מכפלה פנימית</u>

יהי V מ"ו מעל הממשיים או מעל המרוכבים. <u>מכפלה פנימית</u> מעל V הינה פונקציה $<,>: V \times V \to F$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. **לינאריות במשתנה ראשון:**
$\forall u,v \in V, \forall \alpha,\beta \in F :< \alpha v + \beta u, w >= \alpha < v,w > + \beta < u,w >$

2. **הרמיטיות**: (מעל הממשיים זה נקרא סימטריות) $\forall u,v \in V :< v,u >= \overline{< u,v >}$ (מעל הממשיים הרי זה אומר $\forall u,v \in V :< v,u >=< u,v >$)
3. **אי שליליות**: $\forall v \in V :< v,v > \geq 0$ ושיווין אם"ם $v=0$

<u>תרגיל:</u>

הוכח שהפונקציה $< v,u >= v^t A u$ הינה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^{2\times 2}$, עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(פתרון קל)

תזכורת: $A^* = \overline{A^t}$

<u>תרגיל:</u>

הוכח שהפונקציה $<A,B>=tr(AB^*)$ מהווה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}^{m\times n}$.

פתרון:

ליניאריות זה קל, הרמיטיות $<A,B>=tr(AB^*)=tr(\left(AB^*\right)^t)=tr(\overline{B}A^t)=\overline{tr(BA^*)}=\overline{<B,A>}$

אי שליליות: $<A,A>=tr(AA^*)=\sum_{i=1}^{m} R_i(A)C_i(A^*)=\sum_{i=1}^{m} R_i(A)\overline{R^t{}_i(A^*)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^2 \geq 0$

ושיוויון אם"ם זו מטריצת האפס.

<u>תרגיל:</u>

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד n, ויהיו $v_1,\ldots,v_n \in V$ וקטורים במרחב. נגדיר מטריצה A לפי $a_{ij} =<v_i,v_j>$. הוכח: $|A|=0$ אם"ם $v_1,\ldots,v_n$ ת"ל.

הוכחה:

נסתכל על צ"ל כללי של עמודות A:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j C_j(A)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\begin{pmatrix}<v_1,v_j>\\ \vdots \\ <v_n,v_j>\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j <v_1,v_j>\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j <v_n,v_j>\end{pmatrix}=$$

לפי ליניאריות במשתנה ראשון יחד עם הרמיטיות זה שווה ל

$$=\begin{pmatrix}<v_1,\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j>\\ \vdots \\ <v_n,\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j>\end{pmatrix}$$

עמודה זו שווה לאפס אם"ם $\forall i:<v_i,\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j>=0$

טענת עזר (נוכיח אותה מיד): $\forall i:<v_i,\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j>=0$ אם"ם $\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j=0$

ביחד הגענו למסקנה ש $\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\alpha_j C_j(A)=0$

כלומר עמודות המטריצה תלויות לינארית אם"ם הוקטורים תלויים לינארית. אבל עמודות המטריצה ת"ל אם"ם הדטרמיננטה הינה אפס ולכן קיבלנו את התוצאה.

הוכחת טענת העזר:

$\Leftarrow$

נניח $\forall i: <v_i,\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j>=0$. לכן, נכפיל כל משוואה כזו בצמוד של הקבוע אלפא המתאים ונסכום את המשוואות על מנת לקבל $<\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_i}v_i,\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j>=0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_i}<v_i,\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j>=0$ ולפי אי שליליות זה גורר $\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}v_j=0$.

הכיוון ההפוך טריוויאלי שכן אפס כפול כל דבר שווה אפס.