מתמטיקה מד"ר תשעט מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = 2x - 2xy$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 2$.

פתרון: נסדר

$$y' = 2x - 2xy = 2x\,(1-y)$$

$$\frac{y'}{1-y} = 2x$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{1-y} = 2x\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$-\ln|1-y| = x^2 + C$$

לכן $|1-y| = e^{\left(-x^2\right)} \cdot e^C$ ולכן $1 - y = \pm e^{\left(-x^2\right)} \cdot e^C$ ולכן

$$1 \mp e^{\left(-x^2\right)} \cdot e^C = y.$$

נציב תנאי התחלה

$$2 = y(0) = 1 \mp \cdot e^C$$

$$\pm e^C = -1$$

לכן צריך לקחת את המינוס (שמתאים לפתרון עם הפלוס) $C = 0$. התשובה הסופית היא

$$y(x) = 1 + e^{\left(-x^2\right)} \cdot e^C = 1 + e^{\left(-x^2\right)}.$$

2. מצאו פתרון למד"ר $y''+2y'+y=\frac{1}{e^x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=0, y'(0)=1$.

פתרון: נתחיל עם המד"ר ההמוגנית

$$y''+2y'+y=0$$

שהפולינום האופיני שלה $p(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$. לכן -1 שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2. לכן $y_1=e^{-x}, y_2=xe^{-x}$ פתרונות למד"ר הלינארית ההומגנית לעיל. מכיוון שהיא מסדר 2 הם בסיס למרחב הפתרונות שלה. לכן הפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=d_1y_1+d_2y_2=d_1e^{-x}+d_2xe^{-x}=e^{-x}\left(d_1+d_2x\right)$$

וכעת נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית עם שיטת הניחוש. המד"ר שלנו הוא $y''+2y'+y=e^{-x}$ ולכן ננחש

$$y_p=\alpha x^2e^{-x}$$

שהרי -1 הוא שורש מריבוי 2. מתקיים

$$\begin{aligned} y'_{p_1}&=\alpha\left(-x^2+2x\right)e^{-x}\\ y''_{p_1}&=\alpha\left(x^2-2x-2x+2\right)e^{-x}=\alpha\left(x^2-4x+2\right)e^{-x}\end{aligned}$$

נציב במשוואה

$$y''+2y'+y=e^{-x}$$

$$\alpha\left(x^2-4x+2\right)e^{-x}+2\alpha\left(-x^2+2x\right)e^{-x}+\alpha x^2e^{-x}=e^{-x}$$

נצמצם ב e^{-x}:

$$\alpha\left(x^2-4x+2\right)+2\alpha\left(-x^2+2x\right)+\alpha x^2=1$$

$$2\alpha=1$$

לכן $\alpha = \frac{1}{2}$ ו $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ יהיה פתרון פרטי למד"ר שלנו. לכן הפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית שלנו הוא

$$y = y_h + y_p = e^{-x}\left(d_1 + d_2x\right) + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

ונציב תנאי התחלה למציאת הקבועים. מהנתאי הראשון נקבל

$$0 = y(0) = d_1$$

ובנוסף:

$$y' = e^{-x}\left(-d_2x + d_2\right) + \frac{1}{2}\left(-x^2 + 2x\right)e^{-x}$$

ונציב את תנאי התחלה השני

$$1 = y'(0) = d_2$$

ולכן הפתרון הוא

$$.y = xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

3. מצאו פתרון למד"ר $xy' = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}y^3 - y$ המקיים $.y(1) = -1$

פתרון: נסדר

$$xy' + y = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}y^3$$

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{\left(\frac{1}{x}\right)}y^3$$

זוהי מד"ר ברנולי מהצורה

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

עבור $.p = \frac{1}{x}, q = e^{\left(\frac{1}{x}\right)}, n = 3$ נציב $z = y^{1-n} = y^{-2}$ ונקבל את המד"ר

$$z' + (1-n)\,p(x)z = (1-n)\,q(x)$$

או מפורשות

$$z' - \frac{2}{x}z = -2e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ עבור $a(x) = -\frac{2}{x}, b(x) = -2e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. למשל נבחר $A(x) = -2\ln(x)$ (בלי ערך מוחלט כי מחפשים פתרון סביב $x=1$ שהוא חיובי) ואז

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{2\ln(x)}\left(C - \int 2e^{\left(\frac{1}{x}\right)}e^{-2\ln(x)}\mathrm{dx}\right) \\ &= x^2\left(C - 2\int e^{\left(\frac{1}{x}\right)}x^{-2}\mathrm{dx}\right) \end{aligned}$$

נחשב את קדומה של $e^{\left(\frac{1}{x}\right)}x^{-2}$ על ידי הצבה

$$\int e^{\left(\frac{1}{x}\right)}x^{-2}\mathrm{dx} = \left\{ \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ \mathrm{dt} = -\frac{1}{x^2}\mathrm{dx} \end{array} \right\} = -\int e^t\mathrm{dt} = -e^t = -e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

ונקבל ש

$$z(x) = x^2\left(C + 2e^{\left(\frac{1}{x}\right)}\right) = x^2C + 2x^2e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

או

$$y(x) = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2C + 2x^2e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}}$$

נציב תנאי התחלה

$$-1 = y(1) = \frac{1}{\pm\sqrt{C+2e}}$$

לכן $\pm\sqrt{C+2e} = -1$. צריך לקחת את הפתרון עם המינוס ובנוסף: $C + 2e = 1$ ולכן $C = 1 - 2e$. התשובה הסופית היא

$$.y(x) = \frac{1}{-\sqrt{x^2(1-2e) + 2x^2e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}}$$

4. מצאו פתרון למד"ר $xy'' - (1+x)y' + 2y = 0$ המקיים $y(0) = 0$ וכן $y(1) = 1$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

ואז

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1}, \qquad y''=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$xy''-\left(1+x\right)y'+2y=xy''-y'-xy'+2y$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k+2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}\left(k+1\right)kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}\left(k+1\right)x^k-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k+2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$
$$=-a_1+2a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{k+1}\left(k+1\right)k-a_{k+1}\left(k+1\right)-a_kk+2a_k\right]x^k$$

ומשווים לאפס. לכן $-a_1+2a_0=0$ ‏($a_1=2a_0$) ולכל $k\geq 1$ מתקיים

$$a_{k+1}\left(k+1\right)k-a_{k+1}\left(k+1\right)-a_kk+2a_k=0$$

$$a_{k+1}\left(k+1\right)\left(k-1\right)-a_k(k-2)=0$$

ועבור $k=1$ נקבל $a_1=0$ (ולכן גם $a_0=0$) ולכל $k\geq 2$ נקבל

$$a_{k+1}=\frac{a_k(k-2)}{\left(k+1\right)\left(k-1\right)}$$

כלומר, $a_0=a_1=0$, את a_2 נוכל לבחור כרצוננו ולכל $k\geq 2$ מתקיים

$$a_{k+1}=\frac{a_k(k-2)}{\left(k+1\right)\left(k-1\right)}$$

מה שמכריח את $a_3=0$ (בהצבה $k=2$) וכן את כל הבאים אחריו. נבחר $a_2=1$ נקבל את הפתרון $y(x)=x^2$. בנוסף $y(x)=x^2$ מקיים $y(0)=0, y(1)=1$ ולכן הוא הפתרון לתרגיל.

5. מצאו פתרון למד"ר $y''-(1+x)\,y'+xy=0$ המקיים $y(0)=y'(0)=1$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

ואז

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1},\qquad y''=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\,(k-1)\,x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$y''-(1+x)\,y'+2y=xy''-y'-xy'+xy$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\,(k-1)\,x^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1)\,x^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}\,(k+1)\,x^k-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k=$$

$$=2a_2-a_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1)-a_{k+1}\,(k+1)-a_kk+a_{k-1}\right]x^k$$

ומשווים לאפס. לכן $2a_2-a_1=0$ (או $a_2=\frac{1}{2}a_1$) ולכל $k\geq 1$ מתקיים

$$a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1)-a_{k+1}\,(k+1)-a_kk+a_{k-1}=0$$

$$a_{k+2}=\frac{(k+1)\,a_{k+1}+ka_k-a_{k-1}}{(k+2)\,(k+1)}$$

ונציב כמה k ים.

$$a_3=\frac{2a_2+1\cdot a_1-a_0}{3\cdot 2}=\frac{2a_1-a_0}{3\cdot 2}$$

$$a_4 = \frac{3a_3 + 2 \cdot a_2 - a_1}{4 \cdot 3} = \frac{3a_3}{4 \cdot 3} = \frac{2a_1 - a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

ורואים ש a_0, a_1 לבחירתנו וכל שאר a_k יקבעו לפי השיוויון

$$a_{k+2} = \frac{(k+1)\,a_{k+1} + ka_k - a_{k-1}}{(k+2)\,(k+1)}$$

(לכל $k \geq 1$). נבחר $a_0 = a_1$ ונקבל (a_1 עדיין לבחירתנו)

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_3 = \frac{2a_1 - a_0}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{3!}$$

$$a_4 = \frac{2a_1 - a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_1}{4!}$$

$$a_5 = \frac{4a_4 + 3a_3 - a_2}{5 \cdot 4} = \frac{4 \cdot \frac{a_1}{4!} + 3 \cdot \frac{a_1}{3!} - \frac{1}{2}a_1}{5 \cdot 4} =$$

$$= \frac{\frac{a_1}{3!} + \frac{a_1}{2!} - \frac{a_1}{2}}{5 \cdot 4} == \frac{a_1 + 3a_1 - 3a_1}{5!} = \frac{a_1}{5!}$$

וניתן להוכיח כי $a_k = \frac{a_1}{k!}$ לכל $k \geq 1$. נחבר $a_1 = 1$ ונקבל את הפתרון

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = e^x$$

שמקיים $y(0) = y'(0) = 1$ ולכן הוא פתרון לשאלה.