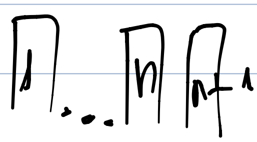
אינדוקציה

רעיון בסיס:

בשביל להוכיח שטענה מסוימת $P(n)$ נכונה עבור כל מספר טבעי (למשל $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$) מספיק להוכיח את הבאים:

- (בסיס האינדוקציה) הטענה מתקיימת עבור $n=1$ כלומר $P(1)$ מתקיים
- (צעד האינדוקציה)**אם** הטענה נכונה עבור מספר טבעי מסוים אזי היא נכונה גם עבור המספר הבא אחריו. כלומר $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

למה זה מספיק?



דוגמא: נוכיח באינדוקציה כי הטענה $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$ נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$ טבעי

בסיס האינדוקציה: נבדוק $n=1$ $\quad 1^2=1^3$

הנחה: נניח עבור $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\quad 1^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$

נוכיח עבור $n+1$.

$$(1+2+\dots+n+(n+1))^2=(1+2+\dots+n)^2+2\cdot(1+2+\dots+n)\cdot(n+1)+(n+1)^2=$$

$$=1^3+\dots+n^3+2(n+1)\cdot\frac{n}{2}(n+1)+(n+1)^2=$$

$$=1^3+\dots+n^3+n(n+1)^2+(n+1)^2=$$

$$=1^3+\dots+n^3+\underbrace{(n+1)^2(n+1)}_{(n+1)^3}$$

$$1^3+\dots+(n+1)^3=(1+\dots+n+1)^2 \leftarrow$$

הוכח כי לכל מספר טבעי n מתקיים כי $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

נראה נכונות $n=1$: $2=1\cdot 2$ ✓

נניח נכונות עבור $n\in\mathbb{N}$. נוכיח עבור $n+1$.

$$\underbrace{2+4+\ldots+2n}+2(n+1)=n(n+1)+2(n+1)=(n+1)(n+2)$$ ✓

לפעמים כדאי להניח הנחות חזקות יותר

תרגיל:

נגדיר $a_0=0, a_{n+1}=a_n^2+1/4$.

הוכח כי לכל n מתקיים $a_n<1$

נוכיח משהו חזק יותר – נוכיח $a_n<\frac{1}{2}$ $\forall n$

$n=0$: $a_{0+1}=0+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

$n=1$: $a_2=a_{1+1}=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

נניח נכונות עבור $n\in\mathbb{N}$ נוכיח:

$$a_{n+1}=\underbrace{a_n^2}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{4}<\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\longrightarrow a_{n+1}<\frac{1}{2}$$ ✓

הערה: עלתה שאלה בשיעור, איך ניתן לדעת שכדאי להוכיח משהו חזק יותר ממה שמבקשים בשאלה? התשובה העיקרית – ניסיון. ככל שפותרים יותר תרגילים נחשפים ליותר טכניקות ומקרים. אישית, בתרגיל הנ"ל הייתי חושבת על ה $\frac{1}{2}$ לאחר הסתכלות על הצורה של נוסחת הנסיגה. רואים שיש $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ והתעסקות עם a_n^2 כשרוצים להוכיח עבור n+1. אבל שוב – $\boxed{\text{ניסיון ותרגול}}$

הכללה פשוטה 1

הכללה ישירה מתבצעת כך (החלפה רק של הטענה הראשונה): אם נוכיח עבור טענה $P(n)$ ש:

- הטענה מתקיימת עבור $n = k$ מסוים כלומר $P(k)$ מתקיים
- **אם** הטענה נכונה עבור מספר טבעי מסוים אזי היא נכונה גם עבור המספר הבא אחריו. כלומר $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

אז באופן דומה הטענה נכונה $P(n)$ נכונה עבור $n \geq k$

כלומר - במקום להוכיח עבור $n = 1$ ואז הטענה מתקיים החל מ-1 ניתן להוכיח עבור $n = k$ ואז הטענה מתקיים החל מ-k

דוגמא:

הוכח כי לכל $x > 0$ מתקיים $(1+x)^n > 1 + nx$ לכל $n \geq 2$

ראינו נכונות $n=2$:

$(1+x)^2 > 1+2x$

$1+2x+x^2 > 1+2x$

נניח עבור n, נוכיח $n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2$

$= 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$ ✓

הכללה פשוטה 2

אם נוכיח עבור טענה $P(n)$ ש:

- הטענה מתקיימת עבור $n = 1$ מסוים כלומר $P(1)$ מתקיים
- **אם** הטענה נכונה עבור כל המספרים עד מספר טבעי מסוים n (כלומר מתקיים $P(m)$ עבור $m \leq n$) אזי היא נכונה גם עבור המספר הבא אחריו (כלומר $P(n+1)$ מתקיים).

אז באופן דומה הטענה נכונה $P(n)$ נכונה עבור $n \geq 1$

כלומר - אפשר להחליף את ההנחה שמתקיים עבור n ולהוכיח עבור $n+1$ בהנחה שמתקיים עבור כל מי ש**קטן שווה** n ולהוכיח עבור $n+1$

דוגמא: כל מספר טבעי $n > 1$ ניתן להציגו במכפלה של מספרים ראשוניים

$n=2$: ראשוני, ולכן פירוק של עצמו.

עבור שאר $n \in \mathbb{N}$ נניח ניתן פירוק של m לראשוניים $\forall m \leq n$ נוכיח עבור $n+1$

אם $n+1$ ראשוני - סיימנו (מכפלה של עצמו)

אם $n+1$ לא ראשוני $\leftarrow$ פריק $n+1=ab$ ו-$1<a,b<n+1$

ע"פ הנחה, $b=\prod_{i=1}^{r} q_i$ $a=\prod_{l=1}^{m} p_l$ כאשר p_i, q_i ראשוניים

$n+1 = \prod_{l=1}^{m} p_l \cdot \prod_{i=1}^{r} q_i$ ✓

תרגיל

יהא A פסוק. נגדיר בעזרת אינדוקציה פסוקים: $P_0 = A, P_n = (P_{n-1}) \to A$ הוכיחו כי P_n טואוטולוגיה כאשר n אי-זוגי.

נראה נכונות עבור $n=1$:

$$P_1 = P_0 \to A$$

✓ $A \to A$

נניח את נכונות הטענה עבור n נוכיח עבור $n+2$

$$P_{n+2} = P_{(n+1)} \to A = (P_{(n)} \to A) \to A$$

לפי ההנחה $T \equiv P(n)$ לכל ערך של A.

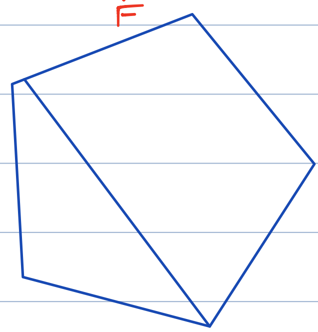
$A \equiv T: \ (T \to T) \to T$

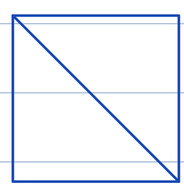
$A \equiv F: \ \underbrace{(T \to F)}_{F} \to F$

תרגיל:

הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי כל מצולע קמור (כלומר הצלע בין כל שני קודקודים נמצאת בפנים המצולע) בן $n \geq 3$ צלעות ניתן לשילוש (כלומר ניתן לחלק אותו למשולשים) ושיש בשילוש $n-3$ אלכסונים.

פתרון: עבור $n = 3$: מצולע קמור בן 3 צלעות חייב להיות משולש (ייתכן בעיוות כלשהוא) ולכן הוא ניתן לשילוש ע"י $n-3=0$ אלכסונים.





יהא מצולע קמור M עם $n+1$ צלעות.

נמתח קו בין שני קודקודים, נחלק לשני מצולעים קמורים M_1, M_2.

M_1 - k צלעות ($k-1$ צלעות משותפות עם הגבול ואחת שהוספנו). ל-M_2 מס' המשותפות $n+1-(k-1) = n-k+2$ סה"כ צלעות ל-M_2 $n-k+3$.

$3 \le k, \quad n-k+3 < n+1$

לפי ההנחה, M_2, M_1 ניתנים לשילוש $k-3$ אלכסונים ל-M_1 $n-k$ ל-M_2 אלכסונים. קיבלנו שילוש את M עם סה"כ $n-3$ אלכסונים ועוד הצלע שהוספנו: בהתחלה, קיבלנו $n-2 = (n+1)-3$ כנדרש בטענה שרצינו להוכיח. מש"ל

אזהרה

אינדוקציה היא כלי חזק אך יש לשים לב כי משתמשים בו נכונה.

דוגמא מפורסמת להוכחת שגויה באינדוקציה היא הדוגמא הבא:

טענה: כל קבוצה של סוסים לא ריקה מכילה סוסים מצבע יחיד.

"הוכחה": נוכיח בעזרת אינדוקציה על מספר האיברים בקבוצת הסוסים.

עבור $n = 1$ אכן מתקיים כי קבוצה עם סוס אחד מכילה רק סוסים מצבע יחיד

בעת נניח כל קבוצה עם n סוסים מכילה סוסים רק מצבע יחיד ונוכיח את הטענה לקבוצת סוסים מגודל $n+1$

תהא $H = \{h_1, h_2, \dots h_n, h_{n+1}\}$ קבוצה עם $n+1$ סוסים אזי לפי הנחת האינדוקציה $H_1 = \{h_1, h_2, \dots h_n\}$ ו $H_2 = \{h_2, \dots h_n, h_{n+1}\}$ הן קבוצות שמכילות סוסים מצבע יחיד (כי אלו קבוצות סוסים מגודל n) ולכן כל הסוסים ב H ג"ב בעלי צבע יחיד (כי יש חפיפה בין H_1 ובין H_2.

(המעבר בין $n=1$ ל$n=2$.

קבוצות

בגדול – קבוצה היא אוסף של איברים. אין משמעות לסדר, איבר לא מופיע באותה קבוצה פעמיים

$\{1,2,3\}$ $\{1,$ ☺ $,$ שנינו$\}$, $\{7,\{\}\}$

נהוג לסמן קבוצות באותיות גדולות, איברים בקטנות.

שייכות – אם x הוא איבר ב A נסמן $x \in A$

הכלה – אם קבוצה A מוכלת ב B $A \subseteq B \iff x\in A \land x \in B$

דוגמא:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \rightarrow \{a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}$

Natural $\{1,2,\dots\}$

שלמים $\{\dots,-1,0,1,2,\dots\}$

רציונלים $\{\frac{a}{b} : a,b\in\mathbb{Z}\}$

ממשיים

נכון/לא נכון?

$1 \in \{1,2,3\} \longrightarrow$ נכון

$4 \in \{1,2,3\} \longrightarrow$ לא נכון

$1 \in \{\{1,2,3\}\} \longrightarrow$ לא נכון

תרגיל

מצאו קבוצות A,B כך ש:

- 1 $A \in B, A \subseteq B$
- 2 $A \in B, A \nsubseteq B$
- 3 $A \notin B, A \subseteq B$
- 4 $A \notin B, A \nsubseteq B$

(1) $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$

(2) $B=\{1,2,\{1,2,3\}\},\{1,2,3\}\}$

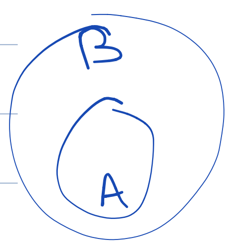
(3) $B=\{1,2,3,4,\{1,2\}\}$

(4) $\{\{0\}\}$

תרגיל

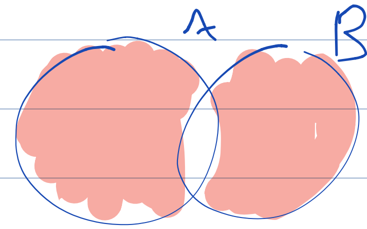
נתון $A=\{\phi\}$ ונתון $B=\{\phi,\{\phi\}\}$. סמן את הביטויים הנכונים:

1. $\phi \subseteq B$ כן
2. $\phi \in \phi$ לא
3. $\phi \subseteq \phi$ כן
4. $A \subseteq B$ כן
5. $A \in B$ כן
6. $A \cup B = B$ כן
7. $A \cap B = \phi$ לא



$C=\{1,2,3\}$ $D=\{3,4\}$ $C \cap D=\{3\}$

פעולות על קבוצות



חיתוך - $A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$

איחוד - $A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$

שיוויון - $A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B$

הפרש - $A \setminus B \iff (x \in A) \wedge (x \notin B)$

הפרש סימטרי - $A \triangle B \iff [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \notin A) \wedge (x \in B)] \iff A \cup B \setminus A \cap B$

דוגמא:

$A = \{1, 2, \{1\}\}, B = \{1, \{2\}\}, C = \{2, \{1, 2\}\}$

$A \cup B =$

$(A \cup B) \cap C =$

$A \cup (B \cap C) =$

$B \cap C =$

$C \setminus A =$

$B \triangle C =$

$A \triangle C =$

תכונות האיחוד והחיתוך (דומה לכפל וחיבור)

- אסוציאטיביות: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (וכנ"ל לגבי איחוד)
- חילוף: $A \cap B = B \cap A$ (וכנ"ל לגבי איחוד)
- דיסטריביוטיביות: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, וגם $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$