מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ג מועד א'

30.8.2023

מרצים: גיא בלשר, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: ראם וקסמן, רועי חסון, אלכסנדר טולסניקוב, כנה נהיר, עידו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- הניקוד לכל שאלה כתוב בתחילתה, והוא מתחלק באופן שווה בין הסעיפים.
- סך הנקודות במבחן הוא 107. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

<u>תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.</u>

<u>ניתן לענות משני צידי הדף.</u>

בהצלחה!

שאלה 1. (27 נק') נתבונן במטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1&-1\\0&2&0&-2\\3&-1&3&2\\-3&1&-1&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$$

ובתת־הקבוצות

$$U=\left\{v\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,Av=2v\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$$
$$W=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\10\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-5\\-8\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$$

א. הוכיחו כי U הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}^4$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-U ול-W.

ג. מצאו בסיס ומימד ל-$U\cap W$.

פתרון.

א. נשים לב כי מתקיים

$$U=\left\{v\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,Av=2v\right\}=\left\{v\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,(A-2I)v=0\right\}=N(A-2I).$$

הוכחנו בהרצאה שמרחב האפס של כל מטריצה הוא תת־מרחב, ולכן זהו תת־מרחב של $\mathbb{R}^4$. (לחילופין, אפשר להשתמש בקריטריון המקוצר ישירות)

ב. עבור U נדרג את מערכת המשוואות $(A-2I)v=0$ ונמצא פתרון כללי:

$$\begin{pmatrix}-3&1&-1&-1\\0&0&0&-2\\3&-1&1&2\\-3&1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-R_1]{R_3\leftarrow R_3+R_1}\begin{pmatrix}-3&1&-1&-1\\0&0&0&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&1&-1&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

נסמן משתנים חופשיים $y=t$ ו-$z=s$, ונקבל שהפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(t-s)\\t\\s\\0\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

לכן בסיס ל-U הוא $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, והמימד הוא 2.

עבור W, נשים את הווקטורים הנתונים במטריצה ונדרג כדי להוריד תלויות לינאריות (אם יש):

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&7&-5\\1&10&-8\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\forall i:R_i\leftarrow R_i-R_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&7&-7\\0&10&-10\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&10&-10\\0&7&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-7R_2]{R_3\leftarrow R_3-10R_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

בעמודה האחרונה אין איבר מוביל, לכן הווקטור האחרון מיותר. זה מראה ש-$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\10\\1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של W, והמימד הוא 2 גם כן.

ג. צריך לכתוב את שני המרחבים כפתרון מערכת משוואות. U כבר נתון כך. נמיר את W למערכת משוואות:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 7 & y \\ 1 & 10 & z \\ 1 & 1 & w \end{array}\right) \xrightarrow{\forall i: R_i \leftarrow R_i - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 7 & y-x \\ 0 & 10 & z-x \\ 0 & 1 & w-x \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & w-x \\ 0 & 10 & z-x \\ 0 & 7 & y-x \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 7R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - 10R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & w-x \\ 0 & 0 & 9x+z-10w \\ 0 & 0 & 6x+y-7w \end{array}\right)$$

לכן $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} 9x+z-10w=0 \\ 6x+y-7w=0 \end{array} \right\}$. נמצא בסיס לחיתוך על ידי דירוג כל המשוואות:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 & -10 \\ 6 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 + 2R_1]{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_2}$$

$$\to \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow -\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 3R_3]{R_2 \leftarrow R_2 + 10R_3}$$

$$\to \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2]{R_1 \leftarrow -\frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} -\frac{1}{9}t \\ \frac{2}{3}t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$. נסיק שבסיס לחיתוך הוא $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, והמימד הוא $\dim(U \cap W) = 1$.

שאלה 2. (20 נק') נביט ב-$\mathbb{R}_2[x] = \left\{ p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$, מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 2.

א. הוכיחו כי הקבוצה $B = \left\{ 1+2x, 2+3x+4x^2, 1-x^2 \right\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

ב. נתבונן ב-B כבסיס סדור. יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר. תהי $T_a \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ההעתקה הלינארית המקיימת

$$\left[T_a\right]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & a+1 & a \\ a & a^2+2 & 4a+2 \\ 1 & a-2 & a+1 \end{pmatrix}$$

מצאו (לכל ערך של $a \in \mathbb{R}$) בסיס ומימד ל-$\ker T_a$ ול-$\operatorname{Im} T_a$.

פתרון.

א. נשים את הפולינומים בעמודות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

במטריצה המדורגת שקיבלנו אין משתנים חופשיים, לכן B בת"ל. מצד שני, $|B| = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$, ולכן לפי משפט השלישי חינם נסיק ש-B היא בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

ב. לפי הקשר בין הגרעין והתמונה של העתקה לינארית לבין מרחב האפס ומרחב העמודות של המטריצה המייצגת, נדרג את המטריצה הנתונה לחישוב המרחבים שלה:

$$\begin{pmatrix}0 & a+1 & a\\ a & a^2+2 & 4a+2\\ 1 & a-2 & a+1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix}1 & a-2 & a+1\\ a & a^2+2 & 4a+2\\ 0 & a+1 & a\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-aR_1}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & a-2 & a+1\\ 0 & a^2+2-a(a-2) & 4a+2-a(a+1)\\ 0 & a+1 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a-2 & a+1\\ 0 & 2a+2 & -a^2+3a+2\\ 0 & a+1 & a\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & a-2 & a+1\\ 0 & a+1 & a\\ 0 & 2a+2 & -a^2+3a+2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-2R_2} \begin{pmatrix}1 & a-2 & a+1\\ 0 & a+1 & a\\ 0 & 0 & -a^2+a+2\end{pmatrix}$$

נחלק למקרים:

- אם $a\neq -1,2$, במטריצה שקיבלנו אין משתנים חופשיים, ולכן $\left[T_a\right]_B^B$ הפיכה. אז T_a הפיכה, ולכן: $\ker T_a=\{0\}$, כלומר $\dim\ker T_a=0$ והבסיס הוא $\varnothing$, ו-$\operatorname{Im} T_a=\mathbb{R}_2[x]$, כלומר $\dim\operatorname{Im} T_a=3$ ובסיס הוא $\left\{1,x,x^2\right\}$.
- אם $a=-1$, נציב במטריצה ונראה שהמטריצה שקיבלנו בסוף הדירוג היא

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לחישוב הגרעין, הפתרון הכללי של המערכת הוא $\begin{pmatrix}3t\\ t\\ 0\end{pmatrix}$, לכן $\left\{\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\left[\ker T_{-1}\right]_B$. זה מראה ש-

$$\left\{3(1+2x)+1(2+3x+4x^2)\right\}=\left\{5+9x+4x^2\right\}$$

בסיס של $\ker T_{-1}$, וכן $\dim\ker T_{-1}=1$.
לחישוב התמונה, העמודות שיש בהן משתנה חופשי הן הראשונה והשלישית. לכן בסיס למרחב העמודות של $\left[T_{-1}\right]_B^B$ מתקבל משתי העמודות המתאימות במטריצה המקורית. נציב $a=-1$ ונקבל שהעמודות הן $\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$. אלו וקטורי הקואורדינטות של איברי בסיס של $\operatorname{Im} T_{-1}$, לכן

$$\left\{-1(2+3x+4x^2)+1(1-x^2),-1(1+2x)-2(2+3x+4x^2)\right\}=\left\{-1-3x-5x^2,-5-8x-8x^2\right\}$$

בסיס של $\operatorname{Im} T_{-1}$ ו-$\dim\operatorname{Im} T_{-1}=2$.
- אם $a=2$, נציב במטריצה ונראה שהמטריצה שקיבלנו בסוף הדירוג היא

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לחישוב הגרעין, הפתרון הכללי של המערכת הוא $\begin{pmatrix}-3t\\ -\frac{2}{3}t\\ t\end{pmatrix}$, לכן $\left\{\begin{pmatrix}-3\\ -\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\left[\ker T_2\right]_B$. בחזרה לאיברי הבסיס המקורי, נקבל שהבסיס לגרעין הוא

$$\left\{-3(1+2x)-\frac{2}{3}(2+3x+4x^2)+(1-x^2)\right\}=\left\{-\frac{10}{3}-8x-\frac{11}{3}x^2\right\}$$

והמימד הוא $\dim\ker T_2 = 1$.

לחישוב התמונה, הפעם שתי העמודות שצריך לקחת הן השתיים הראשונות. לכן $\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ בסיס של $\left[\operatorname{Im} T_2\right]_B$. בחזרה לפולינומים, נקבל ש-

$$\left\{2(2+3x+4x^2)+1(1-x^2), 3(1+2x)+6(2+3x+4x^2)\right\} = \left\{5+6x+7x^2, 15+24x+24x^2\right\}$$

בסיס של $\operatorname{Im} T_2$, ו-$\dim\operatorname{Im} T_2 = 2$.

שאלה 3. (21 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית כך ש-$\ker T\cap\operatorname{Im} T\neq\{0\}$.

א. הוכיחו: אם $U, W\le V$ תת־מרחבים כך ש-$\dim U = 1$ ו-$U\cap W\neq\{0\}$, אז $U\subseteq W$.

ב. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $\dim V = 3$, אז $\ker T\subseteq\operatorname{Im} T$ או $\operatorname{Im} T\subseteq\ker T$.

ג. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $\dim V = 4$, אז $\ker T\subseteq\operatorname{Im} T$ או $\operatorname{Im} T\subseteq\ker T$.

פתרון.

א. מתקיים $U\cap W\subseteq U$, ולכן $\dim(U\cap W)\le\dim U = 1$. מצד שני, מההנחה נובע $\dim(U\cap W)\ge 1$. ביחד נקבל $\dim(U\cap W) = 1 = \dim U$. מהכלה ושוויון מימדים נקבל ש-$U\cap W = U$, ומכאן נסיק $U\subseteq W$.

ב. <u>הוכחה.</u> לפי משפט הדרגה, $\dim\ker T+\dim\operatorname{Im} T = \dim V = 3$. כמו כן, מההנחה $\ker T\cap\operatorname{Im} T\neq\{0\}$ נובע ש-$\dim\ker T, \dim\operatorname{Im} T\ge 1$. לכן יש שני מקרים: $\dim\ker T = 1$ ו-$\dim\operatorname{Im} T = 2$, או $\dim\ker T = 2$ ו-$\dim\operatorname{Im} T = 1$. במקרה הראשון נקבל מהסעיף הקודם ש-$\ker T\subseteq\operatorname{Im} T$, ובמקרה השני נקבל מהסעיף הקודם ש-$\operatorname{Im} T\subseteq\ker T$.

ג. <u>הפרכה.</u> יש הרבה דוגמאות אפשריות. כל דוגמה להעתקה $T\colon V\to V$ שבה $\dim\ker T = \dim\operatorname{Im} T = 2$ ו-$\dim(\ker T\cap\operatorname{Im} T) = 1$ תעבוד.
למשל, אפשר לבחור $T\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ לפי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\\y\\0\end{pmatrix}.$$

בדוגמה הזו $\ker T = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ו-$\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ אינם מוכלים זה בזה, אבל החיתוך מקיים $\ker T\cap\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\neq\{0\}$.

שאלה 4. (18 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, יהיו B, C בסיסים סדורים של V, ותהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית.

א. הוכיחו כי $\det\left([T]_B^B\right) = \det\left([T]_C^C\right)$.

ב. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> $\operatorname{tr}\left([T]_B^B\right) = \operatorname{tr}\left([T]_C^C\right)$.

ג. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> $\operatorname{adj}\left([T]_B^B\right) = \operatorname{adj}\left([T]_C^C\right)$.

פתרון.

א. לפי משפט מההרצאה, $[T]_C^C = [I]_C^B[T]_B^B[I]_B^C$, ולכן מכפליות הדטרמיננטה נקבל

$$\det\left([T]_C^C\right) = \det\left([I]_C^B[T]_B^B[I]_B^C\right) = \det\left([I]_C^B\right)\det\left([T]_B^B\right)\det\left([I]_B^C\right).$$

מצד שני, ראינו גם כי $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$, לכן $\det\left([I]_C^B\right) = \left(\det\left([I]_B^C\right)\right)^{-1}$. זה מראה ש-$\det\left([T]_B^B\right) = \det\left([T]_C^C\right)$.

ב. <u>הוכחה.</u> נזכור כי לכל שתי מטריצות A_1, A_2 מתקיים $\operatorname{tr}(A_1 A_2) = \operatorname{tr}(A_2 A_1)$. לכן

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left([T]_C^C\right) &= \operatorname{tr}\left([I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C\right) = \operatorname{tr}\left([I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C\right) = \operatorname{tr}\left([I]_B^C [I]_C^B [T]_B^B\right)\\ &= \operatorname{tr}\left([I]_B^C [I]_C^B [T]_B^B\right) = \operatorname{tr}\left(I \cdot [T]_B^B\right) = \operatorname{tr}\left([T]_B^B\right)\end{aligned}$$

כנדרש.

ג. <u>הפרכה.</u> נגדיר $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ לפי $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. נבחר בסיסים $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ הבסיס הסטנדרטי, ו-$C = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. נחשב כל מטריצה מייצגת:

ביחס ל-B,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow [T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

והמטריצה הנלווית היא

$$\operatorname{adj}\left([T]_B^B\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ביחס ל-C,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow [T]_C^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

והמטריצה הנלווית היא

$$\operatorname{adj}\left([T]_C^C\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

לכן קיבלנו הפרכה.

שאלה 5. (21 נק') נביט ב-$V_1 = \mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{C}$, ונביט ב-$V_2 = \mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$. כמו כן, נביט בקבוצה

$$A = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

א. הוכיחו כי $A \subseteq V_1$ היא תלויה לינארית.

ב. הוכיחו כי $A \subseteq V_2$ היא בלתי־תלויה לינארית.

ג. יהיו $U_1 \leq V_1$ ו-$U_2 \leq V_2$ תת־מרחבים כך ש-$U_1 = U_2$. הוכיחו כי $\dim U_2 = 2 \cdot \dim U_1$. (רמז: חלקו למקרים)

פתרון. הנקודה החשובה לשים לב בשאלה הזו היא ש-V_1 ו-V_2 שווים כקבוצות, אבל אנחנו חושבים עליהם כעל מרחבים וקטוריים מעל שדות שונים: עבור V_1 מותר להשתמש גם בסקלרים מרוכבים, ואילו עבור V_2 מותר להשתמש רק בסקלרים ממשיים. בתשובה נדגיש זאת על ידי כך שנסמן מימדים על ידי $\dim_{\mathbb{F}} V$, כלומר נזכיר במפורש את השדה שמעליו אנחנו עובדים.

א. אנחנו יודעים כי $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, ולכן כל תת־קבוצה ב-$\mathbb{C}^2$ שמכילה יותר משני איברים היא תלויה לינארית מעל $\mathbb{C}$. זה מוכיח ש-$A \subseteq V_1$ תלויה לינארית.
אפשר גם להוכיח ישירות: נשים לב כי

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} - (1+i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וזהו צירוף לינארי מתאפס לא טריוויאלי של איברי A מעל $\mathbb{C}$. לכן $A \subseteq V_1$ תלויה לינארית.

ב. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

עבור $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. צ"ל: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. אם נחבר את הווקטורים נקבל

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta i + \gamma \\ \alpha i + \beta + \gamma \end{pmatrix} = 0.$$

כאן הסקלרים ממשיים, לכן יש ארבע משוואות:

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma&=0\\ \beta&=0\\ \alpha&=0\\ \beta+\gamma&=0\end{aligned}$$

ורואים מיד ש-$\alpha=\beta=\gamma=0$. לכן $A\subseteq V_2$ בלתי־תלויה לינארית.

ג. נדגים שני פתרונות: בראשון נחלק למקרים, ובשני נוכיח באופן ישיר.
פתרון באמצעות חלוקה למקרים. נשים לב כי $0\le\dim_{\mathbb{C}}U_1\le\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2=2$. לכן יש שלושה מקרים:

- $\dim_{\mathbb{C}}U_1=0$: אז $U_1=\{0\}$. לכן גם $U_2=\{0\}$, ונקבל $\dim_{\mathbb{R}}U_2=0$.
- $\dim_{\mathbb{C}}U_1=2$: אז $U_1=\mathbb{C}^2$ (בגלל הכלה ושוויון מימדים). לכן $\dim_{\mathbb{R}}U_2=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2=4=2\cdot2=\dim_{\mathbb{C}}U_1$.
- $\dim_{\mathbb{C}}U_1=1$: אז $U_1=\{tu\,|\,t\in\mathbb{C}\}$ לאיזשהו $0\neq u\in U_1$. נטען כי $\dim_{\mathbb{R}}U_2=2$. אכן, נראה כי $B_2=\{u,i\cdot u\}$ בסיס של U_2 מעל $\mathbb{R}$. הקבוצה B_2 בת"ל כי אם $\alpha u+\beta iu=0$, אז $(\alpha+\beta i)u=0$. אבל $u\neq 0$ נמצא ב-U_1, לכן $u=0$. כמו כן, B_2 פורשת את U_2: לכל $u'\in U_2$ מתקיים $u'\in U_1$, לכן קיים $t=\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$ שעבורו $u'=(\alpha+\beta i)u=\alpha u+\beta iu$. זה מראה ש-$u'$ צירוף לינארי של איברי B_2, ולכן B_2 פורשת את U_2. בסך הכל B_2 בסיס של U_2, ולכן $\dim_{\mathbb{R}}U_2=2$.

פתרון כללי. יהי $B_1=\{v_1,\dots,v_k\}$ בסיס של U_1 מעל $\mathbb{C}$. נגדיר $B_2=\{v_1,i\cdot v_1,\dots,v_k,i\cdot v_k\}$. נוכיח ש-$B_2$ בסיס של U_2 מעל $\mathbb{R}$.
ראשית, נוודא כי $B_2\subseteq U_2$: לכל $1\le j\le k$ מתקיים $v_j\in B_1\subseteq U_1=U_2$, וכן $i\cdot v_j\in U_1=U_2$ כי U_1 סגור ביחס לכפל בסקלר מ-$\mathbb{C}$.
נוכיח ש-B_2 בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1v_1+\beta_1(i\cdot v_1)+\cdots+\alpha_kv_k+\beta_k(i\cdot v_k)=0$$

עבור $\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$. נקבץ איברים ונקבל

$$(\alpha_1+\beta_1 i)v_1+\cdots+(\alpha_k+\beta_k i)v_k=0.$$

זה צירוף לינארי מתאפס של איברי B_1 מעל $\mathbb{C}$. אבל B_1 בת"ל, לכן לכל $1\le j\le k$ מתקיים $\alpha_j+\beta_j i=0$. מכך ש-$\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{R}$ נסיק ש-$\alpha_j=\beta_j=0$. זה מוכיח ש-B_2 בת"ל.
נוכיח ש-B_2 פורשת את U_2: יהי $u\in U_2$. לכן $u\in U_1$, כלומר קיימים $\gamma_1,\dots,\gamma_k\in\mathbb{C}$ שעבורם

$$u=\gamma_1v_1+\cdots+\gamma_kv_k.$$

לכל $1\le j\le k$ נכתוב $\gamma_j=\alpha_j+\beta_j i$ כאשר $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{R}$. לכן

$$\begin{aligned}u&=(\alpha_1+\beta_1 i)v_1+\cdots+(\alpha_k+\beta_k i)v_k\\ &=\alpha_1v_1+\beta_1(i\cdot v_1)+\cdots+\alpha_kv_k+\beta_k(i\cdot v_k)\end{aligned}$$

זה מוכיח ש-B_2 פורשת את U_2.
בסך הכל הוכחנו ש-B_2 בסיס של U_2, ומכאן נסיק $\dim_{\mathbb{R}}U_2=|B_2|=2k=2\,|B|=2\dim_{\mathbb{C}}U_1$.