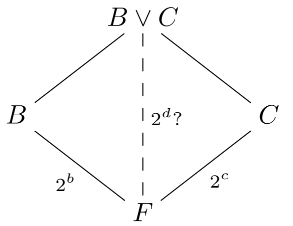
תרגיל

תהי E/F הרחבת גלואה, B,C שדות ביניים מדרגות $2^b, 2^c$ בהתאמה, $b,c>1$. האם בהכרח $B \vee C$ הוא מדרגה 2^d?

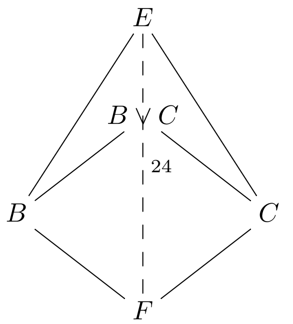
פתרון

זה לא נכון.

נשים לב למה שזה אומר:



אנחנו לא רוצים לקחת פולינום ספציפי ולהתחיל לחשב את החבורות שלו. בתרגול הקודם ראינו שקיימת הרחבת גלואה E/F עם חבורה S_4:



נרצה לקחת תתי חבורות של S_4 כדי לייצר את שדות הביניים.

נגדיר $H_B \simeq S_3$ שקובעת את 4, $H_C \simeq S_0$ שקובעת את 1. $B = E^{H_B}, C = E^{H_C}$ הם מגרגה 4 מעל F

$$\mathrm{Gal}\,(E/B \vee C) \simeq \mathrm{Gal}\,(E/B) \cap \mathrm{Gal}\,(E/C) \cong S_2$$

$$[B \vee C : F] = [\mathrm{Gal}\,(E/F) : \mathrm{Gal}\,(E/B \vee C)]$$

ולכן ההרחבה $B \vee C$ היא לא מדרגה 2^d.

הגדרה

- הרחבה E/F נקראת שורשית אם $E = F(\alpha)$ כאשר $\alpha^n \in F$.
- הרחבה רדיקלית: מגדל של הרחבות שורשיות.
- פולינום פתיר ע"י רדיקלים: מתפצל באיזושהי הרחבה רדיקלית.

הגדרות לא סטנדרטיות

- איבר פתיר ע"י רדיקלים: אם הוא שייך להרחבה רדיקלית.
- איבר פתיר ע"י ריבועים: אם הוא שייך להרחבה רדיקלית שכל ההרחבות ריבועיות.

משפט

איבר ניתן לבניה מעל $\mathbb{Q}$ אם הוא פתיר ע"י ריבועים.

מסקנה

אם איבר ניתן לבניה אזי הוא מדרגה 2^n ($[\mathbb{Q}(z):\mathbb{Q}]=2^n$)

תרגיל

הוכיחו או הפריכו: אם איבר הוא מדרגה 2^n מעל $\mathbb{Q}$ אזי הוא ניתן לבניה.

פתרון

נראה דוגמה נגדית:

$$f(x)=x^4-4x+2\in\mathbb{Q}[x]$$

יהי Eשדה הפיצול של f מעל $\mathbb{Q}$.

עובדה: $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})\cong S_4$

כל שורש של $F(x)$ הוא מדרגה 4 מעל $\mathbb{Q}$. נניח בשלילה שכל השורשים ניתנים לבנייה. אזי כל האיברים בE ניתנים לבניה. ניקח ת"ח H של $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ שאיזומורפית לD_4. אזי $\left[E^H:\mathbb{Q}\right]=\left[\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}):H\right]=\frac{24}{8}=3$ - אבל אזי אף איבר בE^H אינו ניתן לבניה, וזו סתירה.

המשפט הגדול של גלואה

פולינום מעל $\mathbb{Q}$ פתיר ע"י רדיקלים אס"ם חבורת הגלואה שלו היא פתירה.

תרגיל

האם הפולינום $f(x)=5x^5-100x+10$ פתיר בעזרת רדיקלים?

שיטת הפתרון: מחפשים כמה שורשים מרוכבים.

הגדרות

E/F חבורת גלואה סופית.

- עקבה: $\mathrm{Tr}_{E/F}\left(a\right)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\sigma\left(a\right)\in F$
- נורמה: $N_{E/F}\left(a\right)=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\sigma\left(a\right)\in F$

תרגיל(גאוס)

לבנות מצולע משוכלל עם 17 צלעות(לבנות את $\mathrm{cis}\frac{2\pi}{17}$ ע"י שורשים ריבועיים בלבד)

פתרון

מחפשים את $\rho=\mathrm{cis}\frac{2\pi}{17}$.

שלב 0

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(p)/\mathbb{Q}}\left(p\right)=?$$

$$\Phi_{H}\left(x\right)=x^{16}+x^{15}+\cdots+x+1$$

$$1=-\left(\text{sum of roots}\right)=-\mathrm{Tr}\left(\rho\right)$$

$$f\left(x\right)=\left(x-\alpha_{1}\right)\cdots\left(x-\alpha_{n}\right)$$

$$\mathrm{Tr}\left(\rho\right)=-1$$

$$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\rho\right)/\mathbb{Q}\right)=U_{17}\simeq\mathbb{Z}_{16}$$

3 הוא יוצר של U_{17}. $\sigma:\rho\to\rho^{3}$ הוא יוצר של Gal.

$$\begin{array}{c}\mathbb{Q}(\rho)\\ \Big| \\ \mathbb{Q}(\rho)^{\langle\sigma^{8}\rangle}\\ \Big| \\ \mathbb{Q}(\rho)^{\langle\sigma^{4}\rangle}\\ \Big| \\ \mathbb{Q}(\rho)^{\langle\sigma^{2}\rangle}\\ \Big| \\ \mathbb{Q}(\rho)\end{array}$$

שלב 1

$$\alpha=\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}(\rho)^{\langle\sigma^{2}\rangle}}(\rho)=\rho+\sigma^{2}(\rho)+\sigma^{4}(\rho)+\sigma^{6}(\rho)+\cdots+\sigma^{14}(\rho)=\rho+\rho^{9}+\rho^{13}+\cdots+\rho^{2}\in\mathbb{Q}(\rho)^{\langle\sigma^{2}\rangle}$$

$$m_{\alpha}(x)=(x-\alpha)(x-\sigma(\alpha))=x^{2}+ax+b$$

$$a=-(\alpha+\sigma(\alpha))=-\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}}(\rho)=-(-1)=1$$

$$b=\alpha\cdot\sigma(\alpha)=\left(\rho+\rho^{9}+\cdots\right)\left(\rho^{3}+\cdots\right)=4\mathrm{Tr}(\rho)=4(-1)=-4$$

$$m_{\alpha}(x)=x^{2}+1x-4$$

שני השורשים הם $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. ניתן לבדוק ש$\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

שלב 2

$$\beta=\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}(\rho)^{\langle\sigma^{4}\rangle}}(\rho)=\rho+\sigma^{4}+\sigma^{8}(\rho)+\sigma^{12}(\rho)$$

$$m_{\beta}=(x-\beta)\left(x-\sigma^{2}(\beta)\right)-\left(\beta+\sigma^{2}(\beta)\right)=-\mathrm{Tr}_{/\mathbb{Q}\left(\sqrt{17}\right)}(\rho)=-\alpha$$

$$\rho\cdot\sigma^{2}(\beta)=\mathrm{Tr}_{/\mathbb{Q}}(\rho)=-1$$

$$m_\beta\left(x\right) = x^2 - \alpha x - 1$$

$$\beta = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

$$m_\rho = \left(x - \rho\right)\left(x - \sigma^8\left(\rho\right)\right) = \left(x - \rho\right)\left(x - \rho^{-1}\right)$$