הרצאה 15

תזכורת של הגדרות: R חוג, M הינו R-מודול שמאלי אם M הינה חבורה אבלית (עם פעולה $+$) עם כפל סקלרי $R\times M\to M$ כך ש-:

$r,s\in R$
$m,n\in M$

1) $(r+s)m=rm+sm$

2) $r(m+n)=rm+rn$

3) $r(sm)=(rs)m$

4) $1_R m=m$

מהן נובע: $0_R m=0_M$, $r0_M=0_M$, $(-1_R)m=-m$

<u>הגדרה</u> יהי M R-מודול, תת-חבורה $N\subseteq M$ נקראת תת-מודול אם N סגורה לכפל הסקלרי, כלומר $rn\in N$ לכל $r\in R$, $n\in N$.

<u>דוגמאות</u> 1) R חוג כלשהו, M R-מודול כלשהו.

יהיו $m_1,m_2,\dots,m_t\in M$. נגדיר

$$\langle m_1,\dots,m_t\rangle=\{r_1m_1+\dots+r_tm_t:\ r_1,\dots,r_t\in R\}$$

הוא תת-מודול הנוצר על ידי $m_1,\dots,m_t$. קיום כלל,

נבדוק שזה אכן תת-מודול. $r_i, s_i \in R$

תת-החבורה:

$$(r_1m_1+\dots+r_tm_t)+(s_1m_1+\dots+s_tm_t) = (r_1+s_1)m_1+\dots+(r_t+s_t)m_t$$

M אבלית + אקסיומה 1.

לכן $\langle m_1,\dots,m_t\rangle$ סגורה לחיבור.

$$-(r_1m_1+\dots+r_tm_t) = (-1_R)(r_1m_1+\dots+r_tm_t) \overset{2,3}{=} (-r_1)m_1+\dots+(-r_t)m_t$$

אקסיומה 2, 3

לכן $\langle m_1,\dots,m_t\rangle$ סגורה להפכיים. לכן היא תת-חבורה.

סגירות לכפל סקלרי: $r_i, s\in R$

$$s(r_1m_1+\dots+r_tm_t) \overset{2,3}{=} (sr_1)m_1+\dots+(sr_t)m_t \in \langle m_1,\dots,m_t\rangle$$

לכן $\langle m_1,\dots,m_t\rangle \subseteq M$ אכן תת-מודול. ברור שזה התת-מודול הכי קטן של M שמכיל את האיברים $m_1,\dots,m_t$.

2) באופן דומה, יהי $S\subseteq M$ תת-קבוצה. כלשהי (שיכולה להיות אינסופית)

התת-מודול הנוצר ע"י S.

$$\langle S\rangle = \{r_1s_1+\dots+r_ns_n : n\in\mathbb{N},\ r_i\in R,\ s_i\in S\}\subseteq M$$

<u>תרגיל</u>: תבדקו שזה אכן תת-מודול.

3) R תחום שלמות. יהי M R-מודול. נגדיר

$Tor(M) = \{m \in M :$ קיים $0_R \neq r \in R$ כך ש- $rm = 0_M\}$ תת-מודול הפיתול

אני טוען שזה תת-מודול. ($Ann_R(M) \neq \{0\} \Rightarrow Tor(M) = M$ אבל לא בהכרח להיפך)

סגירות לחיבור: נניח $m, n \in Tor(M)$. אזי קיימים $r, s \in R$ <u>לא אפסיים</u> כך ש- $rm = sn = 0_M$.

R תחום שלמות $\Leftarrow$ $rs \neq 0_R$. נשים לב כי

$$(rs)(m+n) \overset{2}{=} (rs)m + (rs)n \overset{R \text{ חילופי}}{=} (sr)m + (rs)n \overset{3}{=}$$

$$s(rm) + r(sn) = s(0_M) + r(0_M) = 0_M.$$

סגירות להפכי: $rm = 0_M \Leftarrow$ $r(-m) = r(-1_R \cdot m) = -1_R(rm) = -1_R \cdot 0_M = 0_M$

$\Leftarrow -m \in Tor(M)$.

<u>סגירות לכפל סקלרי</u>: יהי $m \in Tor(M)$. $rm = 0_M$ עבור איזה $r \neq 0_M$.

יהי $s \in R$ כלשהו. $r(sm) = (rs)m = (sr)m = s(rm) = s0_M = 0_M$

ולכן $sm \in Tor(M)$, ולכן $Tor(M)$ תת-מודול.

<u>הערה</u> אם נחשוב על R כמודול מעל עצמו, אזי תתי-המודולים של R הם האידיאלים השמאליים.

<u>הגדרה</u> מודול M נקרא נוצר סופית אם קיימת תת-קבוצה סופית $m_1,\dots,m_t \in M$ כך ש:

$$\langle m_1,\dots,m_t\rangle = M$$

במילים אחרות, לכל $m \in M$ קיימים $r_1,\dots,r_t \in R$ כך ש:

$$m = r_1m_1 + \dots + r_tm_t$$

״M נפרש על ידי קבוצה סופית״.

<u>הגדרה</u> יהי M R-מודול. M נקרא חופשי אם קיימת תת-קבוצה $B \subseteq M$ כך שניתן להציג כל $m \in M$ <u>באופן</u> | <u>יחיד</u> (B ⇐ | בת״ל) בצורה

$$m = \sum_{b \in B} r_b \cdot b$$

כאשר יש רק מספר סופי של b-ים כך ש- $r_b \neq 0_R$. במקרה הזה הקבוצה B נקראית בסיס של M.

<u>משפט מלינארית</u> F שדה. אזי כל F-מודול הינו חפשי

(לכל מרחב וקטורי יש בסיס).

לחוג כללי R.

<u>אזהרה</u> זה לא נכון שכל R-מודול הינו חפשי.

לדוגמא, $R=\mathbb{Z}$ $M=\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

$r\in\mathbb{Z}$

$m=n+37\mathbb{Z}\in M$

$n\in\mathbb{Z}$

$rm=rn+37\mathbb{Z}$.

R אינסופי

M סופי

אם היה בסיס $B\subseteq M$, ויהי $b\in B$.

אזי כל האיברים rb, $r\in R$, היו שונים.

לכן ב- $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ נמצאים אינסוף איברים שונים, מה שלא יתכן.

M הינו R-מודול נוצר סופית (נוצר על ידי $1+37\mathbb{Z}$)

ובכל זאת אין לו בסיס.

$37(1+37\mathbb{Z})=0_M$.

"הקבוצה $\{1+37\mathbb{Z}\}$ פורשת את M, אבל

היא לא בת"ל".

הגדרה יהי R חוג. M R-מודול, N תת-מודול כלשהו.

M אבלית. לכן $N \trianglelefteq M$ תת-חבורה נורמלית, לכן ניתן להגדיר את המנה M/N כחבורה אבלית.

יש כפל סקלרי טבעי:

$$r(m+N) = rm+N$$

טענה הכפל הסקלרי הזה מוגדר היטב.

אכן, יהיו m_1, m_2 שני נציגים של אותה מחלקה ב-M/N. אזי $m_1-m_2 \in N$. אך

$$rm_1 - rm_2 = r(\underbrace{m_1-m_2}_{N}) \in N$$

N סגורה לכפל סקלרי.

לכן $rm_1+N = rm_2+N$.

הגדרה יהי R חוג, M, N שני R-מודולים. העתקה $f: M \to N$ נקראת הומומורפיזם של R-מודולים אם:

1) f הומומורפיזם של חבורות.

$$f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$$

2) f מכבד את הכפל הסקלרי

$f(rm) = r \cdot f(m)$ לכל $r \in R$, $m \in M$.

הערה אם R שדה, אזי הומומורפיזם של R-מודולים
=
העתקה לינארית של מרחבים וקטוריים
מעל R.

טענה יהי $f: M_1 \to M_2$ הומומורפיזם של R-מודולים.

אזי: 1) הגרעין $\ker f = \{m_1 \in M_1 : f(m_1) = 0_{M_2}\}$ הינו תת-מודול של M_1.

2) יותר כללי: יהי $N_2 \leq M_2$ תת-מודול. אזי המקור $f^{-1}(N_2) = \{m_1 \in M_1 : f(m_1) \in N_2\}$ הינו תת-מודול של M_1.

3) יהי $N_1 \leq M_1$ תת-מודול. התמונה $f(N_1)$ הינה תת-מודול של M_2.

הוכחה נוכיח את סעיף 2) יהיו $m, m' \in f^{-1}(N_2)$.

אז $f(m), f(m') \in N_2$. אזי

$$f(m-m') = f(m) - f(m') \in N_2$$

לכן $m-m' \in f^{-1}(N_2)$ ולכן $f^{-1}(N_2)$ תת-חבורה.

סגירות לכפל סקלרי: יהי $m \in f^{-1}(N_2)$, $r \in R$.

$$f(rm) = r \cdot \underbrace{f(m)}_{\in N_2} \in N_2$$

ולכן $rm \in f^{-1}(N_2)$.

<u>משפטי האיזומורפיזם</u>

1) המשפט הבסיסי: יהי $f: M \to N$ הומו' של R-מודולים. אזי $f(M) \simeq M/(\ker f)$

2) המשפט השני: יהי M מודול, $N_1, N_2 \leq M$ תת-מודולים. אזי

$$(N_1 + N_2)/N_1 \simeq N_2/(N_1 \cap N_2)$$

<u>הערה</u> יהיו $N_1, N_2 \leq M$ תת-מודולים. אזי

$$N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 : n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$$

הינו תת-מודול. $N_1 + N_2 = \langle N_1 \cup N_2 \rangle$

וגם $N_1 \cap N_2$ הינו תת-מודול.

3) (המשפט השלישי) יהי M מודול, ויהיו $K \le N \le M$ תת-מודולים.

אזי $\left(M/K\right) / \left(N/K\right) \simeq M/N$

4) (משפט ההתאמה) יהי M מודול, $N \le M$ תת-מודול.

יש התאמה חח"ע ועל בין

$$\left\{ \text{תת-מודולים של } M/N \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{תת-מודולים } K \le M \\ \text{כך ש- } N \le K \end{array} \right\}$$

מהי ההתאמה? ההעתקה הטבעית $f: M \longrightarrow M/N$

$f(m) = m+N$

הינה הומו' של R-מודולים, כי

$f(rm) = rm+N = r(m+N) = r f(m)$.

ההתאמה הינה

$$K \longrightarrow f(K)$$
$$f^{-1}(L) \longleftarrow L \le M/N$$

קטגוריה $C = (Ob(C), \text{חצים})$ כאשר: $Ob(C)$ אוסף של "חפצים"

לכל $A,B\in Ob(C)$ מוגדרת קבוצה $Hom(A,B)$

של העתקות $A\to B$.

עם אקסיומות סבירות. לדוגמא, אם $f:A\to B$
$g:B\to D$

אם $f\in Hom(A,B)$
$g\in Hom(B,D)$ $\Leftarrow$ $g\circ f\in Hom(A,D)$.

<u>לדוגמא</u> $Ob(C)=\{$כל החבורות בעולם$\}$ $C=Group$

$Hom(A,B)=\{f:A\to B$ הומומורפיזמים של חבורות$\}$ הקטגוריה של חבורות.

<u>טענה</u> יהי M R-מודול, יהי $N\subseteq M$ תת-מודול.

אם N ו-M/N הם R-מודולים נוצרים סופית, אזי גם M R-מודול נוצר סופית.

<u>הוכחה</u> N נוצר סופית $\Leftarrow$ קיימים $n_1,\dots,n_t\in N$

שמייצרים את N.

M/N נוצר סופית $\Leftarrow$ יש מספר סופי של מחלקות שמייצרות את M/N

יהי $m_1,\dots,m_s\in M$ קבוצה של נציגים של המחלקות הנ"ל.

אני טוען שהקבוצה הסופית $\{m_1,\dots,m_s,n_1,\dots,n_t\}\subseteq M$ יוצרת (פורשת) את M. אכן, יהי $m\in M$.

אזי נבחין במחלקה $m+N\in M/N$

$$m+N=r_1(m_1+N)+\dots+r_s(m_s+N)=$$
$$(r_1m_1+\dots+r_sm_s)+N.$$

לכן $m-(r_1m_1+\dots+r_sm_s)\in N$

$$m-(r_1m_1+\dots+r_sm_s)=r_1'n_1+\dots+r_t'n_t\ ,\quad r_i'\in R$$

$$m=r_1m_1+\dots+r_sm_s+r_1'n_1+\dots+r_t'n_t$$

ולכן הקבוצה $\{m_1,\dots,n_t\}$ פורשת את M.