משפט אי השלמות של Godel(1931)

משפט אי השלמות של גדל מדבר על מה שאפשר - ואי אפשר - לעשות במתמטיקה. התקווה לפי המשפט הייתה שהשיטה המתמטית, מבחינת המבנה שלה, נותנת לנו אפשרות להוכיח את כל הדברים הנכונים. גדל מראה שבהכרח ישנן טענות שהן נכונות, אבל מבנה ההוכחה המתמטית לא מאפשר להוכיח אותן.

המבנה של ההוכחה המתמטית משתמש באופרטורים, פרדיקטים וכו'. דוגמה לטענות שאפשר להוכיח\להפריך(במספרים טבעיים):

$$\forall x \exists y \quad y > x \quad \surd$$

$$\forall x \exists y \quad y < x \quad \chi$$

$$\forall x \forall y \exists z \quad x^y = z \quad \surd$$

$$\forall x \forall y \exists z \quad x - y = z \quad \chi$$

$$\forall x \exists y \quad 2y = x \quad \chi$$

הטענות שמסומנות כנכונות, לא רק שלכל ההצבות הערך שלהן יהיה אמת - גם אפשר להוכיח אותן לוגית. משפט אי השלמות מראה שיש טענות שלכל הצבה הן יהיו נכונות - אבל אי אפשר להוכיח את זה.

מאפיינים של הוכחה

1. אובייקט סופי מעל א"ב סופי(=מחרוזת).
2. ניתנת לבדיקה בצורה אוטומטית.
3. ניתן להוכיח רק דברים נכונים(נאותות).

משפט Godel

ישנן טענות נכונות בתורת המספרים שאין להן הוכחה.

גירסה שניה

ישנן טענות בתורת המספרים שאין להוכיח אותן ולא את שלילתן.

למה הגרסאות שקולות?

$\Downarrow$ נניח Ψ נכונה אך לא ניתנת להוכחה. $\neg\Psi$ לא נכונה(כי Ψ נכונה) $\Leftarrow$ $\neg\Psi$ לא ניתנת להוכחה(כי ניתן להוכיח רק טענות נכונות).

$\Uparrow$ תהי Ψ טענה בתורת המספרים כך שאם Ψ וגם $\neg\Psi$ לא נכונות. בהכרח או Ψ או $\neg\Psi$ נכונות $\Leftarrow$ ישנה טענה נכונה שלה יכיחה.

הוכחת המשפט

נגדיר את TH כקבוצת הטענות הנכונות בתורת המספרים

טענת עזר

TH לא כריעה. נניח שהוכחנו את טענת העזר. נוכיח את משפט Godel.
בשלילה, נניח שכל טענה Ψ ניתן להוכיח או את Ψ או את $\neg\Psi$. נראה כיצד להכריע את TH

האלגוריתם

1. ניצור את כל ההוכחות האפשריות P אחת אחת לפי סדר המנייה.
לכל הוכחה P:
   א. נבדוק האם P הוכחה לΨ. אם כן, נחזיר P ונעצור.
   ב. נבדוק האם P הוכחה ל$\neg\Psi$. אם כן, נחזיר לא ונעצור.

על פי מאפיין (1) של הוכחות ניתן אכן לציור את כל ההוכחות אחת אחת לפי סדר.
לפי מאפיין (2) ניתן לבדוק את ההוכחה בצורה אוטומטית - כלומר הבדיקה כריעה.
לפי מאפיין (3), נחזיר רק הוכחות נכונות.

טענה

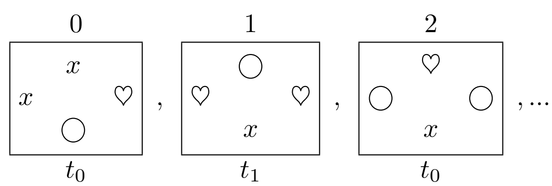
TH לא כריעה

הוכחה

ברדוקציה מ$\{(T, t_0, t_1)\} \subseteq 2BTile$ כך שקיים ריצוף כשר של T בריבוע $k \times k$ שבו מופיעים גם t_0 וגם t_1.

רוצים

בהנתן (T, t_0, t_1) לבנות טענה Ψ בתורת המספרים כך שΨ נכונה אס"ם $2BTile \ni (T, t_0, t_1)$
נמיר את הבעיה (T, t_0, t) לייצור ע"י מספרים. לדוגמה:



לכל אריח ניתן מספר טבעי כך שt_0 מקבל את המספר 0 וt_1 מקבל את המספר 1.
נחלק לזוגות מותרים אופקית ואנכית:
$H = \{(0,1)\,(1,1)\,(2,2)\} \subseteq N \times N$ - זוגות מותרים אופקיים
$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq N \times N$ - זוגות המותרים אנכית.

כלומר, ניתן להגדיר מחדש את הבעיה: $2BTile = \{(V,H)\}$ כך ש$H, V \subseteq N \times N$ סופיים, יש ריצוף בריבוע $k \times k$ שמקיים את הכללים V, H ובו מופיעים 0 ו1.

בהינתן V, H, ניצור $\Psi_{V,H}$ טענה בתורת המספרים כך ש$\Psi_{V,H}$נכונה אם"ם $(V,H) \in 2BTile$

ניתן כעת לייצג ריצוף באמצעות מטריצה:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{matrix}$$

נרצה להפוך את המטריצה למספר בודד. נתחיל בכך שכל שורה נכפוך למספר, על ידי בחירת k המספרים הראשוניים הראשונים, העלאתם בחזקה לפי המטריצה, והכפלת החזקות:

$$3 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow 2^3 3^2 5^0 7^1 = 504$$

$$0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \rightarrow 2^0 3^0 5^2 7^2 = 1,225$$

$$2 \quad 3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow 2^2 3^3 5^3 7^0 = 13,500$$

$$0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \rightarrow 2^0 3^2 5^0 7^2 = 441$$

הקידוד הזה, נקרא "קידוד גודל", הוא חד חד ערכי עד כדי אורך הסדרה. לו היינו רוצים לקודד גם את אורך הסדרה, היינו יכולים להשתמש במעריך של 2 בשביל לקודד את האורך, אבל כאן אין בזה צורך.

קיבלנו סדרה(איבר עבור כל שורה) - וגם אותה ניתן לקודד עם קידוד גודל - $2^{441} 3^{13500} 5^{1225} 7^{504}$

מתקבלות שתי פונקציות על מספרים טבעיים:

- $\text{l-cell}(n,x)$ - הערך במיקום x בסדרה שהמספר n מייצג:

  $$\text{l-cell}(441,2) = 2$$

- $\text{m-cell}(n,x,y)$ - הערך במיקום x, y במטריצה שהמספר n מייצג.

אלו פונקציות של מספרים טבעיים.

כעת ניתן לרשום

$$\text{Kosher}_{V,H}(n,k) =$$

$$\left[\forall 1 \le x \le y, \forall 1 \le y \le k \left(\bigvee_{(i,j)\in H} (\text{m-cell}(n,x,y) = i \wedge \text{m-cell}(n,x+1,y) = j)\right)\right]$$

$$\wedge\left[\forall 1\le x\le y,\forall 1\le y\le k\left(\bigvee_{(i,j)\in H}\left(\text{m-cell}\left(n,x,y\right)=i\wedge\text{m-cell}\left(n,x,y+1\right)=j\right)\right)\right]$$

$$\wedge\left[\exists 1\le x\le k,\exists 1\le y\le k\quad \text{m-cell}\left(n,x,y\right)=0\right]$$

$$\wedge\left[\exists 1\le x\le k,\exists 1\le y\le k\quad \text{m-cell}\left(n,x,y\right)=1\right]$$

זוהי טענה בתורת המספרים; ולכן אפשר לכתוב את הטענה Ψ בתור:

$$\Psi_{V,H}=\exists k,\exists n\quad \text{Kosher}_{V,H}\left(n,k\right)$$

ע"פ הבניה $\Psi_{V,H}$ נכונה אם"ם $(V,H)\in 2BTile$. קיבלנו רדוקציה מ$2BTile$ לTH $\Leftarrow$ TH לא כריעה. ■

דוגמה לבעיה שמרחב החיפוש שלה סופי, אבל אי אפשר להכריע אותה

מתקבל הרושם שבעיות שאינן ניתנות להכרעה הן תמיד בעיות אינסופיות. זה לא נכון:

בעיית נחש הדומינו

קלט: (CT,p_0,p_1) כאשר CT קבוצת אריחי דומינו, p_0,p_1 נקודות במרחב. השאלה היא האם יש נחש חוקי שמחבר ביניהן?

מתברר שאם מותר להשתמש במישור כולו אז הבעיה כריעה, אבל אם מסתכלים רק על חצי המישור - הבעיה לא כריעה.

יתרה מזו - אם מוציאים ריבוע אחד מאיזשהו מקום במישור - הבעיה לא כריעה.