אלגברה מופשטת 2 – תרגיל כיתה 4

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

תרגיל:

תנו דוגמא לחוג לא קומוטטיבי שקבוצת האיברים הנילפוטנטיים בו אינה סגורה לחיבור.

פיתרון:

בחוג $R = M_2(\mathbb{R})$ המטריצות $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ הן נילפוטנטיות, אך הסכום שלהן

הוא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה שאינה נילפוטנטית.

משפט האיזומורפיזם הראשון:

יהי $f : R \to S$ הומומורפיזם אזי $R / \ker f \cong \operatorname{Im} f$.

דוגמאות:

1. עבור העתקת שארית החלוקה $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ נקבל $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$.
2. עבור R חוג קומוטטיבי. נביט בפונקציה $\varphi_0 : R[x] \to R$ הקיימת

   $\varphi_0(f(x)) = f(0)$ לכל $f(x) \in R[x]$. זהו אפימורפיזם [הוכחה: תרגיל בית].

   הגרעין הוא כל הפונקציות שהמקדם החופשי שלהן הוא 0, כלומר

   $\ker \varphi_0 = \{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\} = \{x \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\} = < x >$. מכאן מקבלים

   ש $R[x] / < x > \cong R$.
3. באופן דומה ניתן להראות ש $R[x, y] / < y > \cong R[x]$.

תרגיל: יהיו $J \subseteq I$ אידיאלים של R. הוכח כי קיים אפימורפיזם $R/I \to R/J$.

הוכחה: נגדיר $f: R/I \to R/J$ לפי $f(r+I) = r+J$. נראה כי הפונקצייה מוגדרת היטב. נניח $r+I = s+I$. אזי $r-s \in I$. מכיוון ש $I \subseteq J$, מתקיים $r-s \in J$, ולכן $r+J = s+J$.

נראה כי היא שומרת חיבור (כפל יהיה לבית).

$f((r+I)+(s+I)) = f((r+s)+I) = (r+s)+J = (r+J)+(s+J)$.

לכל $r+J$ יש מקור והוא $r+I$, ולכן הפונקצייה היא על.

הגדרה: $R \neq I \lhd R$ הוא אידיאל מקסימלי אם לא קיים $R \neq J \lhd R$ כך ש $I \subset J$.

דוגמאות:

1. ב $\mathbb{Z}_{45}$ האידיאלים המקסימליים הם $3\mathbb{Z}_{45}$ ו $5\mathbb{Z}_{45}$.
2. ב $\mathbb{Z}_{32}$ האידיאל המקסימלי היחיד הוא $2\mathbb{Z}_{32}$.
3. בחוג עם חילוק, אין אידיאלים לא טריוויאלים, ולכן אידיאל האפס הוא מקסימלי.
4. לכל ראשוני p, $p\mathbb{Z}$ הוא אידיאל מקסימלי של $\mathbb{Z}$.
5. עבור R חוג קומוטטיבי, $<x> \lhd R[x,y]$ איננו מקסימלי, משום שישנו למשל האידיאל $J = \{f(x,y) : f(0,0) = 0\}$ שמכיל אותו ממש.
6. עבור F שדה, בחוג $F[[x]]$ ישנו אידיאל מקסימלי אחד $<x>$.

תרגיל: יהי $f: R \to S$ אפימורפיזם ויהי אידיאל אמיתי (Proper ideal) $I \lhd R$ המכיל את הגרעין אז גם $f(I) \lhd S$ הוא אידיאל אמיתי.

הוכחה: [זה שהוא בכלל אידיאל נשאיר כתרגיל בית] נניח בשלילה כי $I \lhd R$ אידיאל אמיתי וכי $f(I) = S$. ניקח איבר $x \in R \setminus I$. מכיוון ש $f(I) = S$, קיים איבר $y \in I$ כך ש $f(y) = f(x)$. כעת, $x = y + (x-y)$. אולם $x - y \in \ker f \subseteq I$ ולכן $x \in I$ וזו סתירה.

מסקנה-תרגיל: יהי $f: R \to S$ אפימורפיזם ויהי $I \lhd S$. הוכח כי אם I מקסימלי אזי $f^{-1}(I)$ מקסימלי.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים אידיאל ביניים $f^{-1}(I) \subset P \lhd R$.

$\ker f = f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(I)$ ולכן גם P מכיל את הגרעין, ולכן $f(P) \lhd R$ הוא אידיאל אמיתי. כמו-כן, $f(P)$ הוא מכיל ממש את I כי $f^{-1}(I)$ כבר כולל את כל האיברים הנשלחים ל I, ומכיוון ש P מכיל ממש את $f^{-1}(I)$, הוא חייב להכיל איברים שלא נשלחים ל I. משמע, יש אידיאל ביניים $I \subset f(P) \lhd S$, ולכן I לא מקסימלי.

משפט: יהיה חוג R. $I \lhd R$ מקסימלי אם ורק אם R/I חוג פשוט. אם R קומוטטיבי אזי $I \lhd R$ מקסימלי אם ורק אם R/I שדה.

דוגמאות:

1. לכל ראשוני p, $p\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ מקסימלי ולכן $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ שדה.
2. אם R שדה אזי $< x > \lhd R[x]$ מקסימלי בגלל ש $R[x]/< x > \cong R$.
3. $< x > \lhd \mathbb{Z}[x]$ אינו מקסימלי משום ש $\mathbb{Z}[x]/< x > \cong \mathbb{Z}$ וזה לא שדה.
4. ע"פ הלמה של צורן, כל אידיאל בחוג עם יחידה מוכל באידיאל מקסימלי, במקרה הזה $< x, p > \lhd \mathbb{Z}[x]$ הוא אידיאל מקסימלי לכל ראשוני p משום ש $\mathbb{Z}[x]/< x, p > \cong \mathbb{Z}_p$ הוא שדה.

הגדרה: $I \lhd R$ ייקרא ראשוני אם לכל שני אידיאלים $A, B \lhd R$ כך ש $AB \subseteq I$ אזי $A \subseteq I$ או $B \subseteq I$.

הערה: עבור חוגים קומוטטיביים זה שקול לומר כי לכל $a, b \in R$, אם $ab \in I$ אזי $a \in I$ או $b \in I$.

אולם, בחוגים לא קומוטטיביים התנאי הזה חזק יותר מהראשוניות. למשל, אם D חוג עם חילוק אזי $M_2(D)$ חוג פשוט ולכן $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\} \lhd M_2(D)$ הוא ראשוני. אבל, $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ מבלי שאף אחת משתי המטריצות משמאל נמצאת באידיאל.

דוגמאות:

1. $p\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ ראשוני כי אם $xy \in p\mathbb{Z}$ אזי $p \mid x$ או $p \mid y$.
2. יהי R תחום שלמות [=חוג קומוטטיבי עם יחידה ללא מחלקי אפס] אזי $< x > \lhd R[x]$ אידיאל ראשוני. נראה זאת על דרך השלילה. נניח שמתקיים $fg \in < x >$ כך ש $f, g \notin < x >$. אזי ל f ו g ישנם איברים חופשיים השונים מאפס. לכן במכפלה שלהם [בגלל שאין מחלקי אפס] ישנו איבר חופשי השונה מאפס, וזו סתירה לכך ש $fg \in < x >$.

טענה: יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה. הוכח כי R תחום שלמות אם ורק אם $\{0\}$ הוא אידיאל ראשוני.

הוכחה: R תחום שלמות אם ורק אם לכל שני איברים $ab=0$ מתקיים $a=0$ או $b=0$, כלומר לכל $ab \in \{0\}$ מתקיים $a \in \{0\}$ או $b \in \{0\}$, וזה לפי הגדרה קורה אם ורק אם $\{0\}$ הוא אידיאל ראשוני.

תרגיל: יהי R חוג קומוטטיבי ו $I \lhd R$ אידיאל ראשוני. הוכח כי $R \setminus I$ סגורה לכפל.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיימים $a,b \in R \setminus I$ כך ש $ab \notin R \setminus I$. אזי $ab \in I$ ומכיוון שהוא ראשוני, $a \in I$ או $b \in I$. משמע, $a \notin R \setminus I$ או $b \notin R \setminus I$ וזו סתירה.

תרגיל: יהיה R חוג קומוטטיבי עם יחידה שבו כל האידיאלים הם ראשוניים. צריך להוכיח כי הוא שדה.

הוכחה: נתון ש $\{0\}$ ראשוני ולכן R תחום שלמות. יהי איבר $0 \neq x \in R$. נביט באידיאל $< x^2 >$. הוא ראשוני מהנתון ולכן $x \in < x^2 >$, משמע קיים $a \in R$ כך ש $x = ax^2$. לכן $x(ax-1) = 0$, ומכיוון ש R תחום שלמות ו $x \neq 0$, $ax = 1$, משמע x הפיך ולכן R שדה.

תרגיל: יהי הומומורפיזם $f : R \to S$ של חוגים קומוטטיביים ויהי $I \lhd S$ ראשוני. הוכח כי $f^{-1}(I)$ ראשוני.

הוכחה: [פשוטה. נשאיר לבית.]

הערה: אם $I, J \lhd R$ רשאוניים אזי $I \cap J$ לאו דוקא ראשוני. למשל $R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}$ ו $J = 3\mathbb{Z}$. במקרה הזה $I \cap J = 6\mathbb{Z}$ שאיננו ראשוני.

משפט:

1. אם R חוג אזי $I \lhd R$ רשאוני אם ורק אם $\{0\}$ הוא אידיאל ראשוני ב R / I.
2. אם R קומוטטיבי אזי $I \lhd R$ ראשוני אם ורק אם R / I תחום שלמות.

דוגמאות:

1. $< x >$ אידיאל ראשוני ב $\mathbb{Z}[x]$ משום ש $\mathbb{Z}[x]/ < x > \cong \mathbb{Z}$ הוא תחום שלמות.
2. $< x >$ איננו ראשוני ב $\mathbb{Z}_4[x]$ משום ש $\mathbb{Z}_4[x]/ < x > \cong \mathbb{Z}_4$ איננו תחום שלמות.

טענה: בחוג קומוטטיבי R עם יחידה, כל אידיאל מקסימלי הוא ראשוני.

הוכחה: יהי $I \lhd R$ מקסימלי, אזי R / I שדה, ולכן R / I תחום שלמות ולכן I ראשוני.

(בהאפשר הזמן)

הכללה: בחוג לאו דוקא קומוטטיבי עם יחידה, כל אידיאל מקסימלי הוא ראשוני.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים $I \lhd R$ מקסימלי לא ראשוני, אז קיימים $A,B \lhd R$ כך ש $AB \subseteq I$ אך $A,B \not\subseteq I$. כעת, מצד אחד $(A+I)(B+I) \subseteq I$ [חישוב פשוט] ומאידך $A+I=B+I=R$ [בגלל מקסימליות] ולכן $R \cdot R \subseteq I$. זה אומר שהיחידה נמצאת ב I, ולכן $I=R$, סתירה.

הערה: אם לא מניחים שיש יחידה אז הטענה איננה נכונה. למשל ל $R=2\mathbb{Z}$ יש אידיאל מקסימלי $I=4\mathbb{Z}$ כך ש $I \subseteq R \cdot R$.

תרגיל: *(מבחן 2007 מועד א)* חוג R נקרא ראשוני למחצה אם לא קיים אידיאל $R \rhd I \neq 0$ כך ש $I^2=0$. אידיאל P בחוג כלשהו R נקרא ראשוני למחצה אם R/P הוא חוג ראשוני למחצה.

1. הוכח כי כל ראשוני הוא ראשוני למחצה.
2. הוכח כי P ראשוני למחצה אם ורק אם לכל אידאל $I \lhd R$, אם $I^2 \subseteq P$ אז $I \subseteq P$.

הוכחה: נתחיל מהוכחת סעיף ב ואז נסביר מדוע הוא גורר את סעיף א.

נביט בהעתקה הטבעית $f: R \to R/P$.

נניח כי P לא ראשוני למחצה, אזי R/P לא ראשוני למחצה, ולכן קיים $R/P \rhd I \neq 0$ כך ש $I^2=0$. האידיאל $f^{-1}(I) \lhd R$ מקיים $(f^{-1}(I))^2 \subseteq P$ אך $f^{-1}(I) \not\subseteq P$.

זה מוכיח את הכיוון ההפוך.

נניח כרגע כי קיים $J \lhd R$ כך ש $J^2 \subseteq P$ וגם $J \not\subseteq P$. אזי האידיאל $f(J) \lhd R/P$ מקיים $(f(J))^2=0$ אך $f(J) \neq 0$ ולכן R/P לא ראשוני למחצה ולכן P לא ראשוני למחצה. זה מוכיח את הכיוון הישיר.