

תרגיל 13 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את Φ_{2^n} (הפולינום הציקלוטומי מסדר 2^n).
פתרון: לפי נוסחת הנסיגה

$$\Phi_{2^n} = \frac{x^{2^n} - 1}{n-1} = \frac{x^{2^n} - 1}{x^{2^{n-1}} - 1} = x^{2^{n-1}} + 1$$

$$\prod_{k=0} \Phi_{2^k}$$

2. הראו כי אם ρ הוא שורש יחידה n פרימיטיבי ו $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q})$ אז $\sigma(\rho)$ גם שורש יחידה n פרימיטיבי.

פתרון: הפולינום הציקלוטומי Φ_n הוא פולינום מעל \mathbb{Q} שהשורשים שלו הם בדיוק שורשי היחידה ה n -פרימיטיביים. בגלל שאברים בחבורת גלואה שולחים שורשי פולינום לשורשי פולינום הטענה ברורה.

3. (א) בנה במפורש מצולע משוכלל בעל 6 צלעות. (כלומר, לא רק להוכיח שאפשר לבנות, לתאר את הבניה).

פתרון: חישוב קצר מגלה ש

$$\Phi_6 = x^2 - x + 1$$

כלומר $e^{\frac{2\pi i}{6}}$ הוא מדרגה 2 מעל \mathbb{Q} והוא שורש של הפולינום הנ"ל. נפתור ונגלה ש

$$e^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

(ב) כנ"ל למצולע משוכלל בעל 12 צלעות.

פתרון: אחרי שפתרנו את סעיף א, נסמן

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

ואז

$$e^{\frac{2\pi i}{6}} = \sqrt{\alpha}$$

4. מצאו את כל הפולינומים הציקלוטומיים מדרגה 4.
פתרון: חיפוש קצר אחרי פתרונות המשוואה $\varphi(n) = 4$ מגלה ש

$$n = 5, 8, 10, 12$$

שמתאימים לפולינומים

$$\Phi_5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_8 = x^4 + 1$$

$$\Phi_{10} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\Phi_{12} = x^4 - x^2 + 1$$

5. נניח $a \in \mathbb{C}$ איבר שאינו ניתן לבניה עם פולינום מינימלי m_a מדרגה 4. יהי E שדה הפיצול של m_a . מה יכולה להיות $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$? (מהם כל האפשרויות?)
פתרון: היות ש a אינו ניתן לבניה, E אינו מוגדר ריבועית ולכן $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ אינה בגודל חזקת 2. מצד שני, היא חייבת להיות משוכנת ב S_4 שהיא בגודל $24 = 2^3 \cdot 3$ ולכן האפשרויות הן להיות בגודל 12, 24 כלומר S_4 או A_4

6. לכל חבורה G סופית יש הרחבת גלואה K/F כך ש G היא חבורת גלואה. שימו לב שעבור $G = S_n$ הוכחנו זאת בתרגול.
פתרון: לפי משפט קיילי $G \hookrightarrow S_n$ עבור $n = |G|$. ראינו כבר שיש E/F גלואה כך ש

$$\text{Gal}(E/F) \cong S_n$$

ואז

$$\text{Gal}(E/E^G) \cong G$$

כנדרש (וראינו כבר שזו הרחבת גלואה).