

תרגול כיתה 3 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
הכלה וההדחה, הסתברות אלמנטרית על קבוצות, משתנים מקריים
מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

נוסחת הכלה וההדחה ההסתברותית

יהיו A_1, A_2, \dots, A_n מאורעות, אזי:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n$$

כאשר:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n P(A_i), \quad S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j), \quad S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k),$$

$$\dots \quad S_n = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

שאלה 1

מגדילים מספר טבעי מהטווח $[1, 2, \dots, 30k]$ ($k \in \mathbb{N}$). מה ההסתברות שאינו מתחלק ב-2 או 3 או 5?

אלגברה של קבוצות/מאורעות

פעולת האיחוד – $A \cup B$, קבוצת כל האיברים המופיעים או ב-A או ב-B או בשניהן.

פעולת החיתוך – $A \cap B$, קבוצת כל האיברים המופיעים גם ב-A וגם ב-B.

המשלים – \bar{A} (או A^c), קבוצת כל האיברים המופיעים ב- Ω אבל לא ב-A.

Ω – הקבוצה האוניברסלית. \emptyset – הקבוצה הריקה.

כללי דה-מורגן: (1). $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (2). $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

חוק הסתברות איחוד מאורעות: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

שאלה 2

(א). הוכח: $P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F)$

(ב). הוכח:

$$P[A^c \cap (B \cup C)] = P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$$

(ג). נתון: $P(A^c \cap B^c \cap C) = 0$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = \alpha$, $P(A) = 4\alpha$, $P(B) = 2\alpha$.

חשב: $P[A^c \cap (B^c \cup C)]$

משתנים מקריים בדידים, תוחלת ושונות

משתנה מקרי ממשי (מ"מ): $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ממרחב המדגם לישר הממשי

תוחלת של משתנה מקרי

$$E(X) = \sum_k k \cdot P(X = k)$$

טרנספורמציה לינארית: $E(aX + b) = aE(X) + b$

כאשר $g(X)$ פונקציה של מ"מ, התוחלת שלה: $E[g(X)] = \sum_k g(k) \cdot P(X = k)$

שונות של משתנה מקרי

$$Var(X) = E\{(X - E[X])^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2$$

טרנספורמציה לינארית: $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$

שאלה 3

מסובכים 2 סכיבונים זהים. על הפאות של כל סכיבון מסומנים המספרים $\{1,1,2,3\}$.

- נגדיר משתנה מקרי $X =$ סכום 2 הסיבובים. מצא את התפלגות X .
- חשב את התוחלת והשונות של X .
- נגדיר משתנה חדש: $Y = 4X - 17$. מצא את התוחלת והשונות של Y .
- נגדיר משתנה חדש נוסף: $Z = (X - 5)^2$. מצא את התפלגות Z וחשב את השונות שלו.

שאלה 4

משתנה מקרי X מקבל את הערכים $0,1,2,\dots$ בהסתברות $P(X = i) = \frac{C}{3^i}$, $i = 0,1,2,\dots$

- מצא את הערך של הקבוע C .
- את התוחלת של X .
- את ההסתברות ש- $X > 5$.
- את ההסתברות ש- X לא זוגי.

שאלה 5

בשק נמצאים שישה תלושי הגרלה עם סכומי זכייה בש"ח: על שלושה רשום המספר 0,

על שניים המס' 20 ועל אחד המס' 40.

מהמר נדרש לשלם 20 ש"ח על מנת להשתתף בהגרלה. עליו למשוך שני תלושים מהשק והוא זוכה

בסכום אשר שווה לממוצע החשבוני של שני המספרים ששלף. חשב את:

א. ההתפלגות הסכום שהמהמר מקבל.

ב. תוחלת הרווח ואת שונות הרווח של המהמר.

שאלה 6

כד מכיל שמונה כדורים, מהם שלושה אדומים וחמישה כחולים. מוציאים מהכד כדורים בזה אחר זה ללא

חזרה. נגדיר מ"מ X הסופר את מס' הכדורים האדומים שהוצאו עד הוצאת כדור כחול ראשון.

מצא את פונ' ההסתברות של X ואת פונ' ההתפלגות המצטברת שלו.

שאלה 7

משתנה מקרי X מתפלג כדלקמן:

$$(a \neq b \neq c \neq 0) \quad P(X = 1) = c, P(X = 0) = b, P(X = -1) = a$$

א. אם התוחלת והשונות שוות ל-0.5, מצא את a, b, c .

ב. הוכח: $V(X) \leq 1$ (אין קשר לסעיף א').

שאלה 8

בתיבה מפוזרים 20 פתקים. על כל פתק רשום מס' אחר בין 1 ל-20. בכל סעיף התיבה מלאה בהתחלה.

א. מוציאים פתקים בזה אחר זה ללא החזרה. נגדיר מ"מ X – מס' הפתקים שהוצאו עד הוצאת הפתק

עם 7. חשב את התפלגות X .

ב. מוציאים פתקים בזה אחר זה עם החזרה. נגדיר מ"מ Y – הפתק עם 7 נשלף בהוצאה ה- k ,

$k = 1, \dots, 20$ (שים לב: לא נאמר דבר לגבי $k-1$ ההוצאות האחרות). חשב את התפלגות Y .

מצא ביטוי לתוחלת של Y כאשר סה"כ מספר הפתקים בתיבה הוא n .

ג. מוציאים פתקים בזה אחר זה עם החזרה. לפני ההחזרה רושמים את מספרו של כל פתק שהוצא.

נגדיר מ"מ Z – מס' הפתקים המתחלקים ב-5 ללא שארית שנרשמו בהוצאת 3 פתקים סה"כ.

חשב את התפלגות Z .