88195 מתמטיקה בדידה

בוחן, סמסטר א' תשע"ד

זמן: שעה וחצי (90 דקות).
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון).
נא לכתוב על עטיפת מחברת הבחינה: שם, מס' ת"ז, שם המתרגל.

1. ענו על השאלות הבאות:

א) (10 נק') הגדירו "הוכחת טיעון בשלילה" והוכיחו את הטיעון הבא בשלילה כאשר המשתנים נלקחים מהממשיים $\mathbb{R}$:

$$\forall z P(z) \to \forall x \forall y \left(P\left(x^2+y^2\right)\right).$$

ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו עבור כל פסוק האם הוא טאוטולוגיה:

1) $\left(A \wedge (A \to B)\right) \to B$

2) $\left((A \to B) \to (B \to C)\right) \to (A \to C)$

פיתרון:

א) טיעון הינו פסוק מהצורה: $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_2 \to R$ כאשר P_i נקראים הנחות ו- R נקרא מסקנה.

הוכחת טיעון בשלילה, היא הוכחה שהפסוק $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_2 \wedge \neg R$ הוא סתירה.

כלומר, <u>מניחים בשלילה</u> את $\neg R$, ומוכיחים שיחד עם ההנחות מגיעים לסתירה.

נוכיח את הטיעון $\forall z P(z) \to \forall x \forall y \left(P\left(x^2+y^2\right)\right)$ בשלילה.

נניח בשלילה $\neg\left(\forall x \forall y \left(P\left(x^2+y^2\right)\right)\right)$ ונראה ש- $\neg\left(\forall x \forall y \left(P\left(x^2+y^2\right)\right)\right) \wedge \forall z P(z)$ סתירה.

$$\neg\left(\forall x \forall y \left(P\left(x^2+y^2\right)\right)\right) \wedge \forall z P(z) \equiv \exists x \exists y \left(\neg P\left(x^2+y^2\right)\right) \wedge \forall z P(z) \Rightarrow$$
$$\exists z \left(\neg P(z)\right) \wedge \forall z P(z) \equiv F$$

ב)

.1 $\left(A \wedge (A \to B)\right) \to B \equiv \left(A \wedge (\neg A \vee B)\right) \to B \equiv (A \wedge B) \to B \equiv$
$(\neg A \vee \neg B) \vee B \equiv T$

.2 עבור הצבת האמת $A = T,\ B = F,\ C = F$ הפסוק מקבל ערך שקר והפסוק אינו טאוטולוגיה.

2. הוכיחו או הפריכו:

א) (10 נק') $A\Delta B=(A\cup B)\cap(B^c\cup A^c)$.

ב) (10 נק') $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ג) (10 נק') $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

פיתרון:

א) נכון: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\setminus(B\cap A)=(A\cup B)\cap(B\cap A)^c=$
$(A\cup B)\cap(B^c\cup A^c)$

ב) נכון: $C\in P(A\cap B)\equiv C\subseteq(A\cap B)\equiv C\subseteq A\wedge C\subseteq B\equiv C\in(P(A)\cap P(B))$

ג) לא נכון: ניקח $A=\{1\},B=\{2\}$.

3. לכל אחד מהיחסים R הבאים, הוכיחו (לכל תכונה בנפרד) האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי. אם זה יחס שקילות, ציינו מה הן מחלקות השקילות.

א) (15 נק') $((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in R\subseteq(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ אם $x_1=x_2$.

ב) (15 נק') $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ אם $(a\equiv b(\mathrm{mod}\,2))\vee(a\equiv b(\mathrm{mod}\,3))$.

פיתרון:

א) יחס שקילות:

רפלקסיביות: $(x,y)R(x,y)$ כי $x=x$.

סימטריות: נניח $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$, אזי $x_1=x_2$ ואז $x_2=x_1$ ולכן $(x_2,y_2)R(x_1,y_1)$.

טרנזיטיביות: נניח $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)\wedge(x_2,y_2)R(x_3,y_3)$, אזי $x_1=x_2\wedge x_2=x_3$ ואז $x_1=x_3$ ולכן $(x_1,y_1)R(x_3,y_3)$.

ב) אינו יחס שקילות כיוון שאינו טרנזיטיבי: ניקח $2R4\wedge 4R7$, ואולם $\neg(2R7)$.

4. תהיינה A קבוצה ו- B תת-קבוצה של A. נגדיר יחס R_B על $P(A)$ לפי:
$R_B=\{(X_1,X_2)\in P(A)\times P(A): X_1\cap B=X_2\cap B\}$.

א) (15 נק') הוכיחו: R_B יחס שקילות.

ב) (15 נק') תהיינה $B,C\in P(A)$ כך ש- $B\subseteq C$. הוכיחו: $R_C\subseteq R_B$.

פיתרון:

א) רפלקסיביות: $(X,X)\in R_B$ כי $X\cap B=X\cap B$.

סימטריות: נניח $(X_1,X_2)\in R_B$, אזי $X_1\cap B=X_2\cap B$ ואז $X_2\cap B=X_1\cap B$ ולכן $X_2\cap B=X_1\cap B$.

טרנזיטיביות: נניח $(X_1,X_2),(X_2,X_3)\in R_B$, אזי $X_1\cap B=X_2\cap B\wedge X_2\cap B=X_3\cap B$ ואז $X_1\cap B=X_3\cap B$ ולכן $(X_1,X_3)\in R_B$.

ב) יהי $(X_1,X_2)\in R_C$, אזי מההגדרה $X_1\cap C=X_2\cap C$, נחתוך את שני האגפים עם B ונקבל $X_1\cap B=X_1\cap C\cap B=X_2\cap C\cap B=X_2\cap B$, כלומר $(X_1,X_2)\in R_B$. לכן $R_C\subseteq R_B$.